**И. М. СМИРНОВА, В. А. СМИРНОВ**

## ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

## ПО ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 10-11 КЛАССОВ

**МОСКВА**

**«МНЕМОЗИНА»**

## П Р Е Д И С Л О В И Е

Предлагаемые дидактические материалы по геометрии предназначены для работы в 10-11 классах по учебникам:

Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия. 10 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и углублённый уровни). – М.: Мнемозина, 2022.

Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия. 11 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и углублённый уровни). – М.: Мнемозина, 2022.

Смирнов И. М. Геометрия. 10-11 классы: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень). – М.: Мнемозина, 2022.

В настоящее пособие включены математические диктанты, самостоятельные и контрольные работы, тесты, материалы для проведения зачетов. Они помогут организовать самостоятельную работу учащихся, провести текущий контроль и итоговую проверку качества обучения.

Математические диктанты предлагаются к каждому пункту учебника для общеобразовательных классов и составлены в двух вариантах по 5 заданий в каждом из них. Они включают в себя вопросы с пропусками, которые требуется заполнить. Занимая небольшое время урока (7-8 мин), математические диктанты помогают активному включению учащихся в работу, способствуют систематизации теоретических знаний школьников.

Самостоятельные работы также предлагаются к каждому пункту учебника для общеобразовательных классов. Они составлены в двух вариантах по 4-5 заданий в каждом. Содержание самостоятельных работ несколько избыточно, что позволяет учителю по собственному усмотрению выбрать необходимый материал.

Контрольные работы охватывают основные разделы курса геометрии старших классов и подразделяются по профилям обучения. Для общеобразовательных, естественно-научных и гуманитарных классов предлагается соответственно 11, 12 и 6 контрольных работ в двух вариантах, как правило, по 5 заданий в каждом из них. Последнее, пятое, задание отмечено звездочкой и содержит задачу повышенной трудности.

В книге содержатся тесты по основным темам курса геометрии 10-11 классов (7 тестов по 20 заданий в каждом). Они предназначены для проверки успешности усвоения школьниками учебного материала. Тесты не содержат громоздких вычислений и охватывают, по возможности, все основные понятия изученной темы курса геометрии. К каждому тестовому заданию предлагается несколько (как правило, четыре) вариантов ответов, из которых ученик должен выбрать один, верный, по его мнению.

Материал для проведения зачетов распределен на 7 зачетов по основным темам курса геометрии старших классов и включает в себя теоретические вопросы и задачи.

В конце книги приводятся ответы к заданиям самостоятельных, контрольных работ и тестов.

#### § 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДИКТАНТЫ

**1. Основные понятия и аксиомы стереометрии**

***Диктант N 1***

Вариант 1

1. Планиметрия, или геометрия на плоскости, - это раздел геометрии, изучающий … .

2. Одной из самых известных древних школ была … .

3. В переводе с греческого языка *октаэдр* означает … .

4. Точка является идеализацией … .

5. Плоскость является идеализацией … .

Вариант 2

1. Стереометрия, или геометрия в пространстве, - это раздел геометрии, изучающий … .

2. Впервые аксиоматическое построение геометрии было представлено в … .

3. В переводе с греческого языка *гексаэдр* означает … .

4. Основными понятиями стереометрии являются … .

5. Прямая является идеализацией … .

***Диктант N 2***

Вариант 1

1. Через любые две точки пространства проходит … .

2. Существует по крайней мере четыре точки, … .

3. Для прямых и плоскостей в пространстве выполняются все … .

4. Для обозначения плоскости указываются … .

5. Через три точки пространства можно провести … прямых, если … .

Вариант 2

1. Через любые три точки пространства, не принадлежащие одной прямой, проходит …

2. Если две плоскости имеют общую точку, то …

3. Для любой плоскости в пространстве существуют точки, ей …

4. Для обозначения прямой указываются …

5. Через две точки пространства проходит … прямых.

**2. Следствия из аксиом стереометрии**

Вариант 1

1. Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то …

2. Через две пересекающиеся прямые проходит …

3. Через различные пары из трех данных точек пространства, не принадлежащих одной прямой, можно провести … прямых.

4. Через различные тройки из четырех данных точек пространства, не принадлежащих одной плоскости, можно провести … плоскостей.

5. Прямые, пересекающие две данные пересекающиеся прямые и не проходящие через их точку пересечения, лежат …

Вариант 2

1. Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит …

2. Прямая лежит в плоскости, если она имеет, по крайней мере, … точки, принадлежащие данной плоскости.

3. Через три данные точки в пространстве можно провести … плоскостей.

4. Через различные пары из четырех данных точек пространства, не принадлежащих одной плоскости, можно провести … прямых.

5. Прямые, проходящие через данную точку, не принадлежащую данной прямой, и пересекающие ее, лежат …

**3. Пространственные фигуры**

Вариант 1

1. Гранями многогранника называются …

2. Вершинами многогранника называются …

3. Куб – многогранник, у которого …

4. Прямая призма – призма, у которой …

5. Правильная пирамида – пирамида, у которой …

Вариант 2

1. Ребрами многогранника называются …

2. Диагоналями многогранника называются …

3. Параллелепипед – многогранник, у которого …

4. Пирамида – многогранник, у которого …

5. Правильная призма – призма, у которой …

**4. Моделирование многогранников**

Вариант 1

1. Развертка многогранника – это …

2. Для удобства склейки развертку многогранника нужно …

3. Развертка прямого параллелепипеда состоит из …

4. Развертка треугольной призмы состоит из …

5. Развертка правильной шестиугольной пирамиды состоит из …

Вариант 2

1. Чтобы получить развертку многогранника нужно …

2. Геометрический конструктор состоит из …

3. Развертка прямого параллелепипеда состоит из …

4. Развертка прямой пятиугольной призмы состоит из …

5. Развертка правильной четырехугольной пирамиды состоит из …

**5. Параллельность прямых в пространстве**

Вариант 1

1. Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то эта прямая …

2. Две прямые на плоскости называются параллельными, если …

3. Две прямые в пространстве не параллельны, если …

4. Два отрезка называются параллельными, если …

5. В пространстве даны три параллельные между собой прямые, не лежащие в одной плоскости. Тогда через различные пары этих прямых можно провести … плоскостей.

Вариант 2

1. Если прямая имеет с плоскостью только одну общую точку, то эта прямая …

2. Две прямые в пространстве называются параллельными, если …

3. Две прямые на плоскости не параллельны, если …

4. Через точку в пространстве, не принадлежащую данной прямой, проходит …

5. В пространстве даны четыре попарно параллельные между собой прямые, не лежащие в одной плоскости. Тогда через различные пары этих прямых можно провести … плоскостей.

**6. Скрещивающиеся прямые**

Вариант 1

1. Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если …

2. Два отрезка называются скрещивающимися, если …

3. В тетраэдре имеется … пар скрещивающихся ребер.

4. Через точку, принадлежащую прямой, можно провести … прямых, скрещивающихся с этой прямой.

5. Даны две скрещивающиеся прямые и третья прямая, их пересекающая. Плоскости, проходящие через первую и третью прямые и через вторую и третью прямые ...

Вариант 2

1. Две прямые в пространстве называются параллельными, если …

2. Две прямые в пространстве скрещиваются, если они не пересекаются и …

3. Две прямые скрещиваются, если одна из них лежит в плоскости, а другая …

4. Через точку, не принадлежащую прямой, можно провести … прямых, скрещивающихся с этой прямой.

5. В четырехугольной пирамиде имеется … пар скрещивающихся ребер.

**7. Параллельность прямой и плоскости**

Вариант 1

1. Если прямая не имеет с плоскостью ни одной общей точки, то …

2. Прямая пересекает плоскость, если …

3. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает ее, то …

4. Если три вершины параллелограмма принадлежат некоторой плоскости, то четвертая вершина … этой плоскости.

5. Ребро многогранника параллельно его грани, если оно …

Вариант 2

1. Прямая называется параллельной плоскости, если …

2. Прямая лежит в плоскости, если …

3. Доказательство «от противного» заключается в том, что …

4. Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то …

5. Если прямая параллельна прямой, пересекающей данную плоскость, то она …

**8. Параллельность двух плоскостей**

Вариант 1

1. Если две плоскости имеют общую точку, то …

2. Две плоскости не параллельны, если …

3. Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то …

4. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум прямым другой плоскости, то эти вторые прямые …

5. Через точку, не принадлежащую данной плоскости, проходит единственная плоскость …

Вариант 2

1. Две плоскости в пространстве называются параллельными, если …

2. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то …

3. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то …

4. Две грани многогранника параллельны, если они …

5. Через точку, не принадлежащую данной плоскости, проходит … плоскостей, параллельных этой плоскости.

**9. Векторы в пространстве**

Вариант 1

1. Вектором в пространстве называется …

2. Вектор обозначается …

3. Длиной вектора называется …

4. Два вектора в пространстве называются одинаково направленными, если …

5. Для того, чтобы сложить два вектора, нужно …

Вариант 2

1. Вектором на плоскости называется …

2. Вектор изображается …

3. Модулем вектора называется …

4. Два вектора в пространстве называются противоположно направленными, если …

5. При умножении вектора на число …

**10. Коллинеарные и компланарные векторы**

Вариант 1

1. Нулевым вектором называется …

2. Два вектора называются коллинеарными, если …

3. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 векторы … и … коллинеарны.

4. Если векторы и не коллинеарны, то любой вектор , компланарный с ними, можно записать в виде …

5. В параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 векторы … и … компланарны.

Вариант 2

1. Два вектора считаются равными, если …

2. Если вектор коллинеарен ненулевому вектору , то …

3. В параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 векторы … и … коллинеарны.

4. Три ненулевых вектора называются компланарными, если …

5. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 векторы … и … компланарны.

**11. Параллельный перенос**

Вариант 1

1. Движением называется …

2. Две фигуры в пространстве называются подобными, если …

3. Параллельным переносом называется …

4. Параллельный перенос переводит векторы в …

5. Параллельный перенос переводит прямые в …

Вариант 2

1. Две фигуры в пространстве называются равными, если …

2. Подобием называется …

3. Параллельный перенос является движением, так как …

4. Параллельный перенос переводит отрезки в …

5. Параллельный перенос переводит плоскости в …

**12. Параллельное проектирование**

Вариант 1

1. Параллельной проекцией точки *A* на плоскость в направлении прямой *l* называется …

2. Параллельной проекцией прямой является прямая, если …

3. Параллельной проекцией отрезка является точка, если …

4. Параллельные проекции двух параллельных прямых параллельны или совпадают, если …

5. Параллельной проекцией луча может быть …

Вариант 2

1. Параллельной проекцией фигуры Ф на плоскость в направлении прямой *l* называется …

2. Параллельной проекцией прямой является точка, если …

3. Длина отрезка равна длине его параллельной проекции, если …

4. Середина отрезка при параллельном проектировании переходит в …

5. Параллельной проекцией треугольника может быть …

**13. Параллельные проекции плоских фигур**

Вариант 1

1. Параллельной проекцией многоугольника может быть …

2. Параллельной проекцией плоской фигуры, лежащей в плоскости, параллельной плоскости проектирования, является …

3. Параллельной проекцией трапеции может быть …

4. Параллельной проекцией круга является …

5. Сечением цилиндра плоскостью будет круг, если …

Вариант 2

1. Параллельной проекцией равностороннего треугольника может быть …

2. Если в многоугольнике две какие-нибудь стороны параллельны, то …

3. Параллельной проекцией параллелограмма может быть …

4. Параллельной проекцией окружности является …

5. Сечением цилиндра будет фигура, ограниченная эллипсом, если …

**14. Изображение пространственных фигур**

Вариант 1

1. Плоскость, на которую проектируется фигура, называется …

2. Изображение параллелепипеда строится исходя из того, что …

3. Для того, чтобы построить изображение призмы, нужно …

4. Четырехугольник с проведенными в нем диагоналями является изображением …

Вариант 2

1. Изображением фигуры называется …

2. При изображении куба плоскость изображений обычно выбирается …

3. Для того, чтобы построить изображение пирамиды, нужно …

4. Иллюзии возникают при …

**15. Сечения многогранников**

Вариант 1

1. Сечением многогранника плоскостью называется …

2. Диагональным сечением призмы называется …

3. В сечении четырехугольной пирамиды могут получиться …

4. В сечении куба плоскостью, проходящей через середины ребер, выходящих из одной вершины, получается …

5. Чтобы в сечении куба получить прямоугольник, нужно …

Вариант 2

1. Пересечением плоскости и многогранника может быть …

2. Диагональным сечением пирамиды называется …

3. В сечении пятиугольной призмы могут получиться …

4. Чтобы в сечении куба получить квадрат, нужно …

5. Чтобы в сечении куба получить равносторонний треугольник, нужно …

**16. Угол между прямыми в пространстве.**

**Перпендикулярность прямых**

Вариант 1

1. Углом в пространстве называется фигура …

2. Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если …

3. Угол между пересекающимися ребрами куба равен …

4. Два луча в пространстве называются сонаправленными, если …

5. Углы, образованные соответственно параллельными прямыми, …

Вариант 2

1. Углом между двумя пересекающимися прямыми называется …

2. Два отрезка в пространстве перпендикулярны, если …

3. Угол между диагональю грани куба и ребром, лежащим в этой грани равен …

4. Два луча в пространстве называются противоположно направленными, если …

5. Углы с сонаправленными сторонами …

**17. Перпендикулярность прямой и плоскости**

Вариант 1

1. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если …

2. Отрезок называется перпендикулярным плоскости, если …

3. Признак перпендикулярности прямой и плоскости заключается в том, что …

4. Через любую точку пространства проходит … прямая, перпендикулярная данной плоскости.

5. Высотой пирамиды называется …

Вариант 2

1. Плоскость называется перпендикулярной прямой, если …

2. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то …

3. Перпендикуляром, опущенным из точки на плоскость, называется …

4. Через любую точку пространства проходит … плоскость, перпендикулярная данной прямой.

5. Ортогональным проектированием называется …

**18. Перпендикуляр и наклонная**

Вариант 1

1. Перпендикуляром к плоскости называется …

2. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на эту плоскость, то …

3. Перпендикуляр, проведенный из точки к плоскости … всякой наклонной, проведенной из той же точки к той же плоскости.

4. Равные наклонные, проведенные из одной точки к плоскости, имеют …

5. Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных точек, является …

Вариант 2

1. Наклонной к плоскости называется …

2. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то …

3. Ортогональная проекция наклонной … самой наклонной.

4. В правильной пирамиде высота проходит через …

5. Геометрическим местом точек, равноудаленных от трех данных точек, не принадлежащих одной прямой, является …

**19. Угол между прямой и плоскостью**

Вариант 1

1. Углом между наклонной и плоскостью называется …

2. Углом между отрезком и плоскостью называется …

3. Равные наклонные, проведенные к плоскости из одной точки, образуют с ней …

4. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 прямая *AA*1 образует с плоскостью *ABC* угол …

5. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 прямая *A*1*D* образует с плоскостью *DCD*1угол …

Вариант 2

1. Углом между прямой, перпендикулярной плоскости, и этой плоскостью …

2. Угол между наклонной и плоскостью является наименьшим из …

3. Две параллельные наклонные, проведенные к одной и той же плоскости, образуют с ней …

4. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 прямая *AB* образует с плоскостью *BCC*1угол …

5. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 прямая *BC*1 образует с плоскостью *ACD* угол …

**20. Расстояние между точками, прямыми и плоскостями**

Вариант 1

1. Расстоянием между прямой и не принадлежащей ей точкой называется …

2. Расстоянием между двумя параллельными плоскостями называется …

3. Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется …

4. Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми называется …

5. Геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от двух параллельных прямых, является …

Вариант 2

1. Расстоянием между двумя параллельными прямыми называется …

2. Расстоянием между плоскостью и не принадлежащей ей точкой называется …

3. Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых …

4. Расстояние между скрещивающимися прямыми равно …

5. Геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от двух параллельных плоскостей, является …

**21. Двугранный угол**

Вариант 1

1. Полуплоскость можно считать пространственным аналогом …

2. Двугранным углом называется фигура …

3. Гранями двугранного угла называются …

4. Величиной двугранного угла называется …

5. Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется …

Вариант 2

1. Пространственным аналогом угла на плоскости можно считать …

2. Ребром двугранного угла называется …

3. Линейным углом двугранного угла называется …

4. Величина двугранного угла не зависит …

5. Углом между двумя соседними гранями многогранника называется …

**22. Перпендикулярность плоскостей**

Вариант 1

1. Две плоскости называются перпендикулярными, если …

2. Если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна линии их пересечения, то …

3. Через данную прямую перпендикулярно данной плоскости можно провести … плоскостей, перпендикулярных данной.

4. Если плоскость перпендикулярна другой плоскости и из ее точки *A* (*A*) проведен перпендикуляр к плоскости , то …

Вариант 2

1. Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется …

2. Признак перпендикулярности двух плоскостей заключается в том, что …

3. Через точку пространства перпендикулярно данной плоскости можно провести … плоскостей.

4. Если две плоскости и перпендикулярны третьей плоскости , то линия их пересечения …

**23\*. Центральное проектирование**

Вариант 1

1. Центр проектирования – это …

2. Центральным проектированием называется …

3. Центральной проекцией фигуры Ф на плоскость называется …

4. Если плоская фигура расположена в плоскости, параллельной плоскости проектирования, то …

5. Если плоскость проектирования расположена между фигурой и центром проектирования, то …

Вариант 2

1. Центральной проекцией точки *A* на плоскость называется …

2. Перспективой называется …

3. Центральная проекция не определена для точек …

4. Плоская фигура и ее центральная проекция подобны, если …

5. Если центр проектирования расположен между фигурой и плоскостью проектирования, то …

**24. Многогранные углы**

Вариант 1

1. Трехгранным углом называется …

2. Вершиной многогранного угла называется …

3. Плоскими углами многогранного угла называются …

4. Для плоских углов трехгранного угла *SABC* имеет место следующее неравенство …

5. Пятиугольная призма имеет такие многогранные углы …

Вариант 2

1. Многогранным углом называется …

2. Ребрами многогранного угла называются …

3. Гранями многогранного угла называются …

4. Всякий плоский угол трехгранного угла …

5. Шестиугольная пирамида имеет такие многогранные углы …

**25\*. Выпуклые многогранники**

Вариант 1

1. Выпуклой фигурой называется …

2. Многогранник называется выпуклым, если …

3. Примерами выпуклых фигур являются … (назовите две, три).

4. В выпуклом многограннике все грани …

5. Пирамида является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда …

Вариант 2

1. Многоугольник называется выпуклым, если …

2. Многогранный угол называется выпуклым, если …

3. Примерами невыпуклых фигур являются … (назовите две, три).

4. Выпуклый многогранник может быть составлен из …

5. Призма является выпуклым многогранником тогда и только тогда, когда …

**26\*. Теорема Эйлера**

Вариант 1

1. Теорема Эйлера заключается в том, что …

2. Для доказательства теоремы Эйлера поверхность многогранника …

3. Выпуклыми многогранниками с пятью вершинами являются …

4. Если в призме 42 ребра, то в ее основании лежит … -угольник.

5. В *n*-угольной пирамиде В = …, Р = …, Г = … (В – число вершин, Р – ребер, Г – граней многогранника.).

Вариант 2

1. Соотношение Эйлера состоит в том, что …

2. Для многоугольника теорема Эйлера записывается следующим образом …

3. Выпуклыми многогранниками с шестью вершинами являются …

4. Если в пирамиде 48 ребер, то в ее основании лежит … -угольник.

5. В *n*-угольной призме В = …, Р = …, Г = … (В – число вершин, Р – ребер, Г – граней многогранника.).

**27. Правильные многогранники**

Вариант 1

1. Многоугольник называется правильным, если он …

2. Правильных многогранников существует …

3. Октаэдр в переводе с греческого означает …

4. В икосаэдре В = …, Р = …, Г = … .

5. Двойственным многогранником к гексаэдру является …

Вариант 2

1. Многогранник называется правильным, если он …

2. Правильных многоугольников существует …

3. Гексаэдр в переводе с греческого означает …

4. В додекаэдре В = …, Р = …, Г = … .

5. Двойственным многогранником к тетраэдру является …

**28\*. Полуправильные многогранники**

Вариант 1

1. Правильным многогранником называется …

2. К полуправильным многогранникам относятся *n*-угольные призмы, если …

3. Операция усечения многогранника состоит в …

4. Усеченный тетраэдр имеет В = …, Р = …, Г = … .

5. Тел Платона насчитывается …

Вариант 2

1. Полуправильным многогранником называется …

2. *n-*угольная антипризма получается из *n*-угольной призмы …

3. К полуправильным многогранникам относятся *n*-угольные антипризмы, у которых …

4. Усеченный октаэдр имеет В = …, Р = …, Г = … .

5. Тел Архимеда насчитывается …

**29\*. Звездчатые многогранники**

Вариант 1

1. Правильные звездчатые многогранники получаются из правильных многогранников …

2. Звездчатые многогранники не получаются из следующих правильных многогранников: …

3. Икосаэдр имеет … правильных звездчатых форм.

4. Малый звездчатый додекаэдр получается …

5. Существует … тел Архимеда.

Вариант 2

1. Правильный звездчатый пятиугольник можно получить …

2. Звездчатые многогранники получаются из следующих правильных многогранников: …

3. Додекаэдр имеет … правильных звездчатых форм.

4. Большой додекаэдр получается …

5. Существует … тел Кеплера-Пуансо.

**30\*. Кристаллы – природные многогранники**

Вариант 1

1. Форму куба имеют, например, кристаллы …

2. Ромбододекаэдр – это …

3. Кристалл исландского шпата представляет собой …

4. Кристалл алмаза имеет форму …

5. Кристалл граната имеет В = …, Р = …, Г = …

Вариант 2

1. Кристаллы горного хрусталя (кварца) и льда имеют форму …

2. Форму косого параллелепипеда имеет кристалл …

3. Кристалл алмаза имеет форму …

4. Кристалл граната имеет форму …

5. Кристалл алмаза имеет В = …, Р = …, Г = … .

**31. Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости**

Вариант 1

1. Сферой с центром в точке *O* и радиусом *R* называется …

2. Большим кругом называется …

3. Сфера и плоскость не пересекаются, если …

4. Плоскость называется касательной к сфере, если …

5. Ортогональной проекцией шара является …

Вариант 2

1. Шаром с центром в точке *O* и радиусом *R* называется …

2. Большой окружностью называется …

3. Сфера и плоскость пересекаются, если …

4. Плоскость и сфера касаются, если …

5. Сечением шара плоскостью является …

**32. Многогранники, вписанные в сферу**

Вариант 1

1. Аналогом круга в пространстве является …

2. Аналогом треугольника в пространстве является …

3. Многогранник называется вписанным в сферу, если …

4. Центром сферы, описанной около треугольной пирамиды, является точка …

5. Центр окружности, описанной около треугольника, принадлежит одной из его сторон, если …

Вариант 2

1. Аналогом окружности в пространстве является …

2. Аналогом многоугольника в пространстве является …

3. Сфера называется описанной около многогранника, если …

4. Центром окружности, описанной около треугольника, является точка …

5. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит вне треугольника, если …

**33. Многогранники, описанные около сферы**

Вариант 1

1. Многоугольник называется описанным около окружности, если …

2. Сфера называется вписанной в многогранник, если …

3. Биссектральной плоскостью называется плоскость …

4. Центром окружности, вписанной в треугольник, является …

5. Радиус сферы, вписанной в единичный куб, равен …

Вариант 2

1. Окружность называется вписанной в многоугольник, если …

2. Многогранник называется описанным около сферы, если …

3. Геометрическим местом центров сфер, касающихся одновременно граней двугранного угла, является …

4. Центром сферы, вписанной в треугольную пирамиду, является …

5. Радиус сферы, описанной около единичного куба, равен …

**34. Цилиндр. Конус**

***Диктант N 1***

Вариант 1

1. Цилиндром называется …

2. Основаниями цилиндра являются …

3. Образующими цилиндра называются …

4. Осью цилиндра называется …

5. Цилиндр имеет … осевых сечений.

Вариант 2

1. Цилиндр получается следующим образом …

2. Высотой цилиндра называется …

3. Боковой поверхностью цилиндра называется …

4. Осевым сечением цилиндра называется …

5. Цилиндр имеет … образующих.

***Диктант N 2***

Вариант 1

1. Конус получается следующим образом …

2. Высотой конуса называется …

3. Боковой поверхностью конуса называется …

4. Усеченным конусом называется …

5. Высотой усеченного конуса называется …

Вариант 2

1. Конусом называется …

2. Вершиной конуса называется …

3. Образующими конуса называются …

4. Наклонным конусом называется …

5. Высотой наклонного конуса называется …

**35. Поворот. Фигуры вращения**

***Диктант N 1***

Вариант 1

1. Точка *A’* на плоскости получается поворотом точки *A* вокруг точки *O* этой плоскости на угол , если …

2. Поворотом в пространстве называется …

3. Осью вращения называется …

4. Конус получается вращением …

5. Шар получается вращением …

Вариант 2

1. Точка *A’* в пространстве получается из точки *A* поворотом вокруг прямой *a* на угол , если …

2. Вращением в пространстве называется …

3. Фигурой вращения называется …

4. Цилиндр получается вращением …

5. Усеченный конус получается вращением …

***Диктант N 2***

Вариант 1

1. Сфера получается вращением …

2. Тор получается вращением …

3. При вращении параболы вокруг ее оси получается …

4. Конической поверхностью называется …

5. При вращении куба вокруг прямой, соединяющей центры противоположных граней, получается …

Вариант 2

1. Шар получается вращением …

2. Эллипсоид вращения получается вращением …

3. При вращении гиперболы вокруг ее оси получается …

4. Цилиндрической поверхностью называется …

5. При вращении пирамиды вокруг ее высоты получается …

**36. Вписанные и описанные цилиндры**

Вариант 1

1. Сфера называется вписанной в цилиндр, если …

2. Центр сферы, описанной около цилиндра, расположен …

3. Прямая призма называется вписанной в цилиндр, если …

4. Касательной плоскостью к цилиндру называется …

5. Около прямой призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда …

Вариант 2

1. Цилиндр называется описанным около сферы, если …

2. В цилиндр можно вписать сферу, если …

3. Цилиндр называется описанным около прямой призмы, если …

4. Прямая призма называется описанной около цилиндра, если …

5. В прямую призму можно вписать цилиндр тогда и только тогда, когда …

**37\*. Сечения цилиндра плоскостью. Эллипс**

Вариант 1

1. Цилиндрической поверхностью называется …

2. Фокусами эллипса называются …

3. Малой осью эллипса называется …

4. Эллипс можно получить следующим образом …

5. Большой полуосью эллипса называется …

Вариант 2

1. Параллельной проекцией окружности является …

2. Эллипс имеет … фокусов.

3. Большой осью эллипса называется …

4. Фокальное свойство эллипса заключается в том, что …

5. Малой полуосью эллипса называется …

**38. Вписанные и описанные конусы**

Вариант 1

1. Конус называется описанным около сферы, если …

2. Сфера называется описанной около конуса, если …

3. В конус … вписать сферу.

4. Пирамида называется вписанной в конус, если …

5. Около пирамиды можно описать конус тогда и только тогда, когда …

Вариант 2

1. Сфера называется вписанной в конус, если …

2. Конус называется вписанным в сферу, если …

3. Около конуса … описать сферу.

4. Пирамида называется описанной около конуса, если …

5. В пирамиду можно вписать конус тогда и только тогда, когда …

**39\*. Конические сечения**

Вариант 1

1. Коническая поверхность образуется …

2. Если плоскость образует с осью конуса угол, меньший чем угол между образующей и этой осью, то …

3. Фокальное свойство эллипса заключается в том, что …

4. Гиперболой называется геометрическое место точек на плоскости …

Вариант 2

1. Сечения конуса плоскостью можно рассматривать как …

2. Если плоскость образует с осью конуса угол, больший чем угол между образующей и этой осью, то …

3. Параболой называется геометрическое место точек на плоскости …

4. Если плоскость образует с осью конуса угол, равный углу между образующей и этой осью, то …

**40. Симметрия пространственных фигур**

Вариант 1

1. Точки *A* и *A’* пространства называются симметричными относительно точки *O*, если …

2. Фигура Ф в пространстве называется центрально-симметричной относительно точки *O*, если …

3. Прямоугольный параллелепипед является центрально-симметричной фигурой относительно точки …

4. Фигура Ф в пространстве называется симметричной относительно оси *a*, если …

5. Высота правильной четырехугольной пирамиды является осью симметрии … порядка.

Вариант 2

1. Чтобы найти центр симметрии двух центрально-симметричных точек, нужно …

2. Точки *A* и *A’* пространства называются симметричными относительно прямой *a*, если …

3. Прямоугольный параллелепипед симметричен относительно оси, проходящей …

4. Фигура Ф в пространстве называется зеркально-симметричной относительно плоскости, если …

5. Высота правильной треугольной пирамиды является осью симметрии … порядка.

**41. Движения**

Вариант 1

1. Движением называется …

2. Поворотом называется …

3. Зеркальной симметрией называется …

4. Примером движения является …, так как …

5. Движение переводит окружность в …

Вариант 2

1. При движении сохраняются …

2. Центральной симметрией называется …

3. Осевой симметрией называется …

4. Примером движения является …, так как …

5. Движение переводит сферу в …

**42\*. Ориентация плоскости. Лист Мебиуса**

Вариант 1

1. Ориентацией плоскости называется …

2. Краями боковой поверхности цилиндра являются …

3. Количество сторон листа Мебиуса – … .

4. Чтобы изготовить лист Мебиуса из бумажной полоски поступают следующим образом …

Вариант 2

1. Примером неориентируемой поверхности является …

2. Количество сторон сферы – … .

3. Количество краев листа Мебиуса …

4. Чтобы убедиться в односторонности листа Мебиуса поступают следующим образом …

**43. Объем фигур в пространстве. Объем цилиндра**

Вариант 1

1. Объем – это величина, …

2. Кубическим сантиметром называется …

3. Равные пространственные фигуры имеют …

4. Формула объема прямого цилиндра имеет вид …

5. Объем прямого параллелепипеда равен …

Вариант 2

1. За единицу объема принимается …

2. Кубическим метром называется …

3. Объемом фигуры называется …

4. Формула объема прямого кругового цилиндра имеет вид …, где …

5. Объем прямой призмы равен …

**44. Принцип Кавальери**

Вариант 1

1. Принцип Кавальери заключается в следующем …

2. Объем наклонного цилиндра равен …

3. Объем прямой призмы выражается формулой …, где …

4. По формуле *V = abc* вычисляется …

5. Две пространственные фигуры называются равновеликими, если …

Вариант 2

1. Обоснование принципа Кавальери заключается в следующем …

2. Объем прямого цилиндра равен …

3. Объем наклонной призмы выражается формулой …, где …

4. По формуле *V = R*2*h* вычисляется …

5. Две плоские фигуры называются равновеликими, если …

**45. Объем пирамиды**

Вариант 1

1. Объемы пирамид с равными основаниями и высотами …

2. Если площадь основания пирамиды равна *S*, то площадь сечения, параллельного основанию пирамиды и делящего высоту пирамиды пополам, равна …

3. Многоугольник можно разбить на треугольники следующим образом …

4. Объем треугольной пирамиды выражается следующей формулой …

Вариант 2

1. Куб разбили на шесть равных пирамид, вершина каждой из которых находится …

2. Если площадь основания пирамиды равна *Q*, то площадь сечения, параллельного основанию и делящего высоту на части, относящиеся как 1:2, считая от вершины пирамиды, равна …

3. Произвольную пирамиду можно разбить на треугольные пирамиды следующим образом …

4. Объем пирамиды выражается следующей формулой …

**46. Объем конуса**

Вариант 1

1. Конус – это фигура …

2. Вершина конуса – это …

3. Частным случаем конуса является …

4. Объем кругового конуса выражается формулой …, где …

5. Объем усеченного конуса выражается формулой … , где …

Вариант 2

1. Основание конуса – это …

2. Объем конуса выражается формулой … , где …

3. Усеченным конусом называется …

4. Пирамида является частным случаем …

5. Объем усеченной пирамиды выражается формулой …, где …

**47. Объем шара и его частей**

Вариант 1

1. Объем шара радиуса *R* выражается формулой …

2. Если диаметр шара увеличить в 2 раза, то объем шара …

3. Шаровым кольцом называется …

4. Объем шарового сегмента выражается формулой …, где …

5. Шаровым сектором называется …

Вариант 2

1. Объем шара диаметра *D* выражается формулой …

2. Если радиус шара уменьшить в 2 раза, то объем шара …

3. Шаровым сегментом называется …

4. Объем шарового кольца выражается формулой …, где …

5. Шаровым поясом называется …

**48. Площадь поверхности**

Вариант 1

1. Площадь поверхности многогранника равна …

2. Поверхности пирамиды состоит …

3. Площадь боковой поверхности правильной *n*-угольной призмы равна …

4. Площадь полной поверхности цилиндра равна …

5. Площадь боковой поверхности конуса равна …

Вариант 2

1. Площадь боковой поверхности цилиндра равна …

2. Поверхности призмы состоит …

3. Площадь боковой поверхности правильной *n*-угольной пирамиды равна …

4. Площадь боковой поверхности цилиндра равна …

5. Площадь полной поверхности конуса равна …

**49. Площадь поверхности шара и его частей**

Вариант 1

1. Поверхность шара … развернуть на плоскость.

2. Касательная плоскость к шару – это …

3. Площадь большого круга шара радиуса *R* выражается формулой …

4. Площадь поверхности шара диаметра *D* выражается формулой …

Вариант 2

1. Многогранник называется описанным около шара, если …

2. Любой выпуклый многогранник можно разбить на пирамиды следующим образом …

3. Длина окружности большого круга шара диаметра *D* выражается формулой …

4. Площадь поверхности шара радиуса *R* выражается формулой …

**50. Прямоугольная система координат в пространстве**

Вариант 1

1. Координатной прямой называется …

2. Каждой точке на координатной плоскости соответствует …

3. Прямоугольной системой координат в пространстве называется …

4. Координатными прямыми в пространстве называются …

5. Координатные плоскости обозначаются …

Вариант 2

1. Прямоугольной системой координат на плоскости называется …

2. Каждой точке на координатной прямой соответствует …

3. Координатными плоскостями называются …

4. Координатные прямые в пространстве обозначаются …

5. Координатами точки в пространстве называются …

**51. Расстояние между точками в пространстве**

Вариант 1

1. Расстояние от точки *M*(-1, 2, 3) до координатной плоскости *Oxz* равно … .

2. Координата проекции точки *E*(5, -2, 4) на ось абсцисс равна …

3. Расстояние между точками *A*(*xA*, *yA*, *zA*) и *B*(*xB*, *yB*, *zB*) в пространстве выражается формулой …

4. Уравнение сферы с центром в точке *O*(0, -5, 7) и радиусом 9 имеет вид …

Вариант 2

1. Точка *K*(4, -3, 1) находится на расстоянии … от координатной плоскости *Oyz*.

2. Координата проекции точки *F*(-2, 6, -3) на ось аппликат равна …

3. Расстояние между точками *C*(*xC*, *yC*) и *D*(*xD*, *yD*) на плоскости выражается формулой …

4. Точки шара с центром в точке *M*(-8, 0, 3) и радиусом 4 удовлетворяют …

**52. Координаты вектора**

Вариант 1

1. Координатами вектора называются …

2. Сумма векторов (-3, 5, 0) и (5, -2, 10) имеет координаты …

3. Если (0, -6, 2), то вектор -5 имеет координаты … .

4. Точки *A* и *B* имеют координаты *A*(5, 11, -2) и *B*(9, -4, 2), тогда вектор имеет координаты …

5. Длина вектора (*x*, *y*, *z*) равна …

Вариант 2

1. Координатными векторами называются …

2. Разность векторов (0, -1, 3) и (-2, 5, 4) имеет координаты …

3. Если (5, -6, 0), то вектор имеет координаты … .

4. Точки *E* и *F* имеют координаты *E*(0, -4, 7) и *F*(12, 8, -3), тогда вектор имеет координаты …

5. Модуль вектора , где *A*1(*x*1, *y*1, *z*1), *A*2(*x*2, *y*2, *z*2), равен … .

**53. Скалярное произведение векторов**

Вариант 1

1. Угол между одинаково направленными векторами …

2. Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется …

3. Скалярным квадратом называется …

4. Если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то …

5. Скалярное произведение векторов (0, -5, 6) и (19, 5, -6) равно …

Вариант 2

1. Угол между векторами определяется …

2. Скалярное произведение векторов, хотя бы один из которых нулевой, …

3. Скалярный квадрат вектора равен …

4. Физический смысл скалярного произведения заключается в том, что …

5. Скалярное произведение векторов (3, 12, -4) и (2, 0, -5) равно …

**54. Уравнение плоскости в пространстве**

Вариант 1

1. Прямая на плоскости задается уравнением …

2. Вектором нормали называется …

3. Две плоскости в пространстве могут быть …

4. Две плоскости, заданные уравнениями *a*1*x + b*1*y + c*1*z + d*1 = 0, *a*2*x + b*2*y + c*2*z + d*2 = 0, параллельны, если …

Вариант 2

1. Плоскость в пространстве задается уравнением …

2. Вектор нормали имеет координаты …

3. Две плоскости, заданные уравнениями *a*1*x+b*1*y+c*1*z+d*1 = 0, *a*2*x + b*2*y + c*2*z + d*2 = 0, совпадают, если …

4. Две плоскости, заданные уравнениями *a*1*x+b*1*y+c*1*z+d*1 = 0, *a*2*x + b*2*y + c*2*z + d*2 = 0, перпендикулярны, если …

**55\*. Уравнение прямой в пространстве**

Вариант 1

1. Плоскость в пространстве задается уравнением …

2. Прямая в пространстве может быть задана …

3. Система уравнений задает в пространстве …

4. Параметрические уравнения прямых, параллельных оси *Ox*, имеют вид …

Вариант 2

1. Прямая на плоскости задается уравнением …

2. Параметрические уравнения прямой в пространстве имеют вид …

3. Система уравнений задает в пространстве …

4. Параметрические уравнения прямых, параллельных оси *Oz*, имеют вид …

**56. Аналитическое задание пространственных фигур**

Вариант 1

1. Шар радиуса *R* с центром в точке *C*(*x*0, *y*0, *z*0) задается …

2. Неравенство *ax + by + cz +d*  0 задает …

3. Неравенства задают в пространстве …

4. Цилиндр, основание которого лежит в плоскости *Oyz*, с радиусом основания *R* и высотой *h*, можно задать …

Вариант 2

1. Сфера радиуса *R* с центром в точке *C*(*x*0, *y*0, *z*0) задается …

2. Неравенство *ax + by + cz +d*  0 задает …

3. Система неравенств задает в пространстве …

4. Цилиндр, основание которого лежит в плоскости *Oxz*, с радиусом основания *R* и высотой *h*, можно задать …

**57\*. Многогранники в задачах оптимизации**

Вариант 1

1. Примером задачи оптимизации является …

2. Многоугольником ограничений называется многоугольник, на котором …

3. В процессе решения задачи оптимизации получается многогранник, если …

4. Линейная функция на многограннике ограничений принимает свое наименьшее значение …

Вариант 2

1. Составить математическую модель задачи значит …

2. Многогранником ограничений называется многогранник, на котором …

3. В процессе решения задачи оптимизации получается многоугольник, если …

4. Линейная функция на многограннике ограничений принимает свое наибольшее значение …

**58\*. Полярные координаты на плоскости**

***Диктант N 1***

Вариант 1

1. Полярной осью называется …

2. Полярным углом называется …

3. Точке *A*(*r*, ) соответствуют декартовы координаты …

4. Точке *B*(0, 1) соответствуют полярные координаты …

Вариант 2

1. Полярным радиусом называется …

2. Полярными координатами точки называются …

3. Точке *A*(*x*, *y*) соответствуют полярные координаты …

4. Точке *B*(2, ) соответствуют декартовы координаты …

***Диктант N 2***

Вариант 1

1. Уравнение *r = R* задает …

2. Спираль Архимеда задается уравнением в полярных координатах …

3. Если в уравнении *r =*  *a* > 1, то …

4. Четырехлепестковая роза задается уравнением в полярных координатах …

Вариант 2

1. Уравнение *r =*  задает …

2. Уравнение *r =*, где *a* … задает …

3. Если в уравнении *r =*, 0 < *a* < 1, то …

4. Шестилепестковая роза задается уравнением в полярных координатах …

**59\*. Сферические координаты в пространстве**

Вариант 1

1. Точка *A* имеет сферические координаты (*r*, , ), где *r* …

2. Точке *C*(*x*, *y*, *z*) соответствуют сферические координаты …

3. Точке *E*(1,,) соответствуют декартовы координаты …

4. Параллелью на поверхности Земли называется …

Вариант 2

1. Точка *B* имеет сферические координаты (*r*, , ), где …

2. Точке *D*(*r*, , ) соответствуют декартовы координаты …

3. Точке *F*(1, 1, 0) соответствуют сферические координаты …

4. Меридианом на поверхности Земли называется …

**60\*. Использование компьютерной программы «GeoGebra»**

**для изображения пространственных фигур**

Вариант 1

1. Компьютерная программа «GeoGebra» была создана …

2. Для получения изображения графика функции *y= f*(*x*) нужно набрать …

3. Для получения изображения додекаэдра нужно набрать …

4. Для получения изображения икосододекаэдра нужно …

5. Для получения изображения большого звездчатого додекаэдра нужно …

Вариант 2

1. Компьютерная программа «GeoGebra» позволяет …

2. Для получения изображения кривой, заданной параметрическими уравнениями, нужно набрать …

3. Для получения изображения икосаэдра нужно набрать …

4. Для получения изображения усеченного додекаэдра нужно …

5. Для получения изображения малого звездчатого додекаэдра нужно …

**§ 2. САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ**

**1. Основные понятия и аксиомы стереометрии**

***Самостоятельная работа N 1***

Вариант 1

1. Изобразите прямую *a* и точки *A, B* и *C*,не принадлежащие данной прямой. Сделайте необходимые записи.

2. Изобразите плоскость , точки *E, F*,принадлежащие ей, и точку *G*, ей не принадлежащую. Сделайте необходимые записи.

3. Изобразите прямую *a*, лежащую в плоскости . Сделайте необходимую запись.

4. Изобразите две пересекающиеся плоскости и . Сделайте необходимую запись.

Вариант 2

1. Изобразите две пересекающиеся в точке *O* прямые *a* и *b* и точки *A, B, C,* причем точка *A* принадлежит прямой *a*, *B* принадлежит прямой *b*, точка *C* не принадлежит данным прямым.

2. Изобразите плоскость , не принадлежащие ей точки *K, L* и принадлежащую ей точку *M*. Сделайте необходимые записи.

3. Изобразите прямую *b*, пересекающую плоскость в точке *O*. Сделайте необходимую запись.

4. Изобразите три пересекающиеся по прямой *a* плоскости , и . Сделайте необходимую запись.

***Самостоятельная работа N 2***

Вариант 1

1. Из следующих предложений укажите аксиомы, определения, теоремы:

1) Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

2) Через две точки пространства проходит единственная прямая.

3) Вертикальные углы равны.

4) Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

2. Определите взаимное расположение плоскостей и , если в них лежит треугольник *ABC*. Ответ обоснуйте.

3. Сколько плоскостей может проходить через три точки?

4. Найдите наибольшее число прямых, проходящих через различные пары из четырех точек.

Вариант 2

1. Из следующих предложений укажите аксиомы, определения, теоремы:

1) Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

2) Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

3) Для прямых и плоскостей в пространстве выполняются аксиомы планиметрии.

4) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

2. Определите взаимное расположение двух плоскостей и , если им принадлежат точки *B* и *C*. Ответ обоснуйте.

3. Найдите наибольшее число прямых, проходящих через различные пары из 5 точек.

4. Найдите наибольшее число плоскостей, проходящих через различные тройки из четырех точек.

**2. Следствия из аксиом стереометрии**

Вариант 1

1. В плоскости двух пересекающихся прямых *a* и *b* задана точка *C*, не принадлежащая этим прямым. Прямая *c*, лежащая в данной плоскости,проходит через точку *C*.Как может быть расположена прямая *c* относительно данных прямых?

2. Даны три точки, не принадлежащие одной прямой. Докажите, что все прямые, пересекающие два из трех отрезков, соединяющих данные точки, лежат в одной плоскости.

3. Плоскость задана прямой *c* и не принадлежащей ей точкой *C*. Постройте в этой плоскости прямую *a*, отличную от данной прямой и не проходящую через данную точку.

4. Плоскость задана двумя пересекающимися в точке *O* прямыми *a* и *b*. Нарисуйте прямую *c*, которая пересекает данные прямые и не лежит в данной плоскости.

Вариант 2

1. Прямая *d*, лежащая в плоскости треугольника *ABC*,пересекает его сторону *AB*. Каким может быть взаимное расположение прямых *d* и *BC*?

2. В плоскости проведены две параллельные прямые *a* и *b*. Докажите, что все прямые, пересекающие данные прямые, лежат в одной плоскости.

3. Плоскость задана двумя пересекающимися в точке *O* прямыми *m* и *n*. Постройте в этой плоскости прямую *k*, отличную от данных прямых и не проходящую через точку *O*.

4. Плоскость задана тремя точками *D, E, F*, не принадлежащими одной прямой. Нарисуйте прямую *a*, которая пересекает стороны *DE* и *DF* треугольника *DEF* и не лежит в данной плоскости.

**3. Пространственные фигуры**

Вариант 1

1. Нарисуйте пятиугольную призму и разделите ее на тетраэдры.

2. Определите число вершин, ребер и граней: а) куба; б) 7-угольной призмы; в) *n*-угольной пирамиды.

3. Определите вид призмы, если она имеет: а) 10 вершин; б) 21 ребро; в) 5 граней.

4. Каким образом можно окрасить грани 4-угольной призмы, чтобы соседние (имеющие общее ребро) грани были окрашены в разные цвета? Какое наименьшее число цветов потребуется?

Вариант 2

1. Нарисуйте пятиугольную пирамиду и разделите ее на тетраэдры.

2. Определите число вершин, ребер и граней: а) прямоугольного параллелепипеда; б) 6-угольнойной пирамиды; в) *n*-угольной призмы.

3. Определите вид пирамиды, если она имеет: а) 5 вершин; б) 14 ребер; в) 9 граней.

4. Каким образом можно окрасить грани октаэдра, чтобы соседние (имеющие общее ребро) грани были окрашены в разные цвета. Какое наименьшее число цветов потребуется?

**4. Моделирование многогранников**

Вариант 1

1. Нарисуйте несколько разверток куба.

2. Нарисуйте фигуру, состоящую из четырех равных равносторонних треугольников, не являющуюся разверткой правильного тетраэдра.

3. Нарисуйте развертку правильной четырехугольной пирамиды и раскрасьте ее таким образом, чтобы при склеивании соседние грани имели разные цвета. Какое наименьшее число цветов нужно взять?

4. Нарисуйте развертку прямоугольного параллелепипеда и раскрасьте ее таким образом, чтобы при склеивании соседние грани имели разные цвета. Какое наименьшее число цветов нужно взять?

Вариант 2

1. Нарисуйте несколько разверток правильного тетраэдра.

2. Нарисуйте фигуру, состоящую из шести квадратов, не являющуюся разверткой куба.

3. Нарисуйте развертку куба и раскрасьте ее таким образом, чтобы при склеивании соседние грани имели разные цвета. Какое наименьшее число цветов нужно взять?

4. Нарисуйте развертку правильной 6-угольной пирамиды и раскрасьте ее таким образом, чтобы при склеивании соседние грани имели разные цвета. Какое наименьшее число цветов нужно взять?

**5. Параллельность прямых в пространстве**

Вариант 1

1. Запишите в правильной 4-угольнойой пирамиде *SABCD* все пары параллельных ребер.

2. В плоскости двух параллельных прямых *a* и *b* дана точка *C*, не принадлежащая этим прямым. Через точку *C* проведена прямая *c*. Как может быть расположена прямая *c* относительно прямых *a* и *b*.

3. Через точку, не принадлежащую данной прямой, проведите прямую, параллельную данной.

4. Найдите геометрическое место прямых, пересекающих две данные параллельные прямые.

Вариант 2

1. Запишите четыре пары параллельных ребер куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1.

2. Даны три прямые *a, b* и *с*. Как могут располагаться эти прямые, чтобы можно было провести плоскость, содержащую все данные прямые.

3. Даны две параллельные прямые *a* и *b*. Докажите, что любая плоскость, пересекающая одну из них, пересечет и другую.

4. Найдите геометрическое место прямых, параллельных данной прямой и пересекающих другую прямую, пересекающуюся с первой.

**6. Скрещивающиеся прямые**

Вариант 1

1. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 запишите ребра, скрещивающиеся с ребром *AB*.

2. Запишите пары скрещивающихся ребер 4-угольной пирамиды *SABCD*.

3. Как расположены относительно друг друга прямые *a* и *b* на рисунке 1? Ответ обоснуйте.

4. Даны две скрещивающиеся прямые *a* и *b* и не принадлежащая им точка *C*. Постройте прямую *c*, проходящую через точку *C* и пересекающую прямые *a* и *b*.

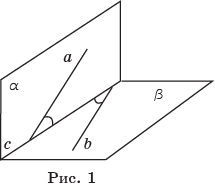
Вариант 2

1. Запишите ребра, скрещивающиеся с ребром *SA* правильной 4-угольной пирамиды *SABCD*.

2. Запишите ребра, скрещивающиеся с диагональю *B*1*D* куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1.

3. Плоскости и пересекаются по прямой *c* (рис. 1). Прямая *a* лежит в плоскости и пересекает прямую *c*. Можно ли в плоскости провести прямую, параллельную прямой *a*? Ответ обоснуйте.

4. Существуют ли две параллельные прямые, каждая из которых пересекает две данные скрещивающиеся прямые? Ответ обоснуйте.



**7. Параллельность прямой и плоскости**

Вариант 1

1. Запишите ребра, параллельные плоскости грани *CC*1*D*1*D* правильной призмы *ABCDEFA*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1.

2. Прямая *a* параллельна плоскости ; прямая *b* пересекает плоскость в точке *B*; прямая *c*, пересекающая прямые *a* и *b* соответственно в точках *E* и *F*, пересекает плоскость в точке *C*. Сделайте рисунок. Как могут располагаться относительно друг друга прямые *a* и *b*?

3. Плоскости и пересекаются по прямой *c*. Точка *A* принадлежит плоскости , точка *B* – плоскости . Постройте: а) прямую *a*, лежащую в плоскости , проходящую через точку *A* и параллельную плоскости ; б) прямую *b*, лежащую в плоскости , проходящую через точку *B* и параллельную плоскости . Как будут располагаться относительно друг друга прямые *a* и *b*?

4. Точки *A* и *B* принадлежат смежным боковым граням пирамиды. Проведите в этих гранях через данные точки два отрезка, параллельные между собой.

Вариант 2

1. Запишите плоскости граней, параллельных ребру *CC*1 параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1.

2. Прямая *a* параллельна плоскости ; прямые *b* и *c*, пересекающие прямую *a* соответственно в точках *B* и *C*, пересекают плоскость соответственно в точках *D* и *E*. Сделайте рисунок. Как могут располагаться относительно друг друга прямые *a* и *b*?

3. Плоскости и пересекаются по прямой *c*. Прямая *a* лежит в плоскости . Докажите, что если: а) *a* пересекает плоскость в точке *A*, то *A* принадлежит прямой *c*; б) *a* параллельна плоскости , то она параллельна прямой *c*.

4. Точки *A* и *B* принадлежат смежным боковым граням призмы. Проведите в этих гранях через данные точки два отрезка, параллельные между собой.

**8. Параллельность двух плоскостей**

Вариант 1

1. Запишите параллельные плоскости параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1.

2. Верны ли утверждения:

1) Через точку, не принадлежащую данной плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.

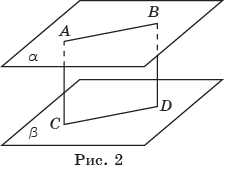
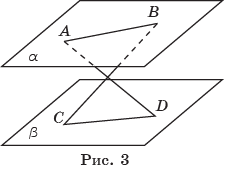
2) Если две прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

3) Существует бесконечно много прямых, параллельных данной плоскости и проходящих через точку, не принадлежащую этой плоскости.

4) Если одна из двух данных плоскостей параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

3. Докажите, что две плоскости, параллельные одной и той же третьей плоскости, параллельны между собой.

4. Отрезки *AB* и *CD* лежат соответственно в параллельных плоскостях и (рис. 2). Как могут располагаться относительно друг друга прямые *AC* и *BD*? Могут ли они быть параллельными?

Вариант 2

1. В треугольной пирамиде *SABC* проведите плоскость, параллельную ее основанию *ABC*.

2. Верны ли утверждения:

1) Если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна прямой, лежащей в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

2) Если плоскость пересекает две данные плоскости по параллельным прямым, то эти плоскости параллельны.

3) Существует бесконечно много плоскостей, параллельных данной прямой и проходящих через точку, не принадлежащую этой прямой.

4) Если две плоскости параллельны одной и той же прямой, то они параллельны.

3. Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

4. Отрезки *AB* и *CD* лежат соответственно в параллельных плоскостях и (рис. 3). Как могут располагаться относительно друг друга прямые *AD* и *BC*? Могут ли они пересекаться?

**9. Векторы в пространстве**

Вариант 1

1. Для данного вектора постройте векторы: а) ; б) ; в) .

2. Сколько векторов задают всевозможные пары точек, составленные из вершин правильной четырехугольной пирамиды?

3. Изобразите правильный тетраэдр *ABCD* и нарисуйте вектор: а) ; б) ; в) .

4. Дан параллелепипед *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Найдите сумму векторов: а) ; б) ; в) .

Вариант 2

1. Для данного вектора постройте векторы: а) 3; б) -2; в) .

2. Сколько векторов задают всевозможные пары точек, составленные из вершин треугольной призмы?

3. Изобразите правильный тетраэдр *ABCD* и нарисуйте вектор: а) ; б) ; в) .

4. Дан параллелепипед *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Найдите сумму векторов: а) ; б) ; в) .

**10. Коллинеарные и компланарные векторы**

Вариант 1

1. На какое число нужно умножить ненулевой вектор , чтобы получить вектор , одинаково направленный с и ||=1.

2. Даны два противоположно направленных вектора и , причем || > ||. Найдите направление и длину вектора .

3. Дан тетраэдр *ABCD*. Запишите три пары его вершин, задающие компланарные векторы.

4. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Запишите тройки некомпланарных векторов с началами и концами в его вершинах.

Вариант 2

1. На какое число нужно умножить ненулевой вектор , чтобы получить вектор , противоположно направленный с и ||=2.

2. Даны два противоположно направленных вектора и , причем || < ||. Найдите направление и длину вектора .

3. Дан тетраэдр *ABCD*. Запишите три пары его вершин, задающие некомпланарные векторы.

4. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Запишите тройки компланарных векторов с началами и концами в его вершинах.

**11. Параллельный перенос**

Вариант 1

1. Постройте фигуру, которая получается параллельным переносом прямой *a* на вектор , если: а) *E* принадлежит *a*, *F* не принадлежит *a*; б) точки *E* и *F* не принадлежат *a*.

2. Задайте параллельный перенос, который середину отрезка *GH* переводит в некоторую точку *M*.

3. Постройте фигуру, которая получается из квадрата *ABCD* параллельным переносом на вектор: а) ; б) .

4. Постройте фигуру, которая получается из тетраэдра *ABCD* параллельным переносом на вектор .

Вариант 2

1. Постройте фигуру, которая получается параллельным переносом окружности с центром в точке *O* на вектор , если: а) точка *K* принадлежит окружности; б) точка *K* не принадлежит окружности.

2. Задайте параллельный перенос, который точку пересечения *O* двух прямых *a* и *b* переводит в некоторую точку *N*.

3. Постройте фигуру, которая получается из правильного треугольника *ABC* параллельным переносом на вектор: а) ; б) , где точка *M* – середина стороны *BC*.

4. Постройте фигуру, которая получается из тетраэдра *ABCD* параллельным переносом на вектор .

**12. Параллельное проектирование**

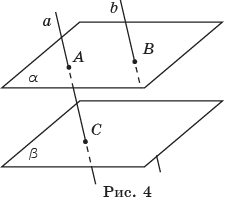
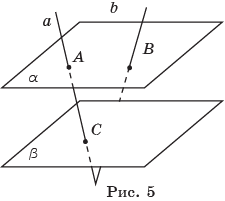
Вариант 1

1. Сколько точек получится при параллельном проектировании двух различных точек пространства? Сделайте соответствующие рисунки и обоснование.

2. Перечислите свойства прямоугольника, которые сохраняются при параллельном проектировании.

3. Как должны быть расположены две прямые, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, не принадлежащую этой прямой?

4. Параллельные прямые *a* и *b* пересекают параллельные плоскости и в четырех точках. Три из них *A, B* и *C* изображены на рисунке 4. Изобразите четвертую точку *D*. Ответ обоснуйте.

Вариант 2

1. Сколько точек получится при проектировании трех различных точек пространства? Сделайте соответствующие рисунки и обоснование.

2. Перечислите свойства ромба, которые сохраняются при параллельном проектировании.

3. Как должны быть расположены прямая и точка, чтобы они проектировались на плоскость в прямую и точку, принадлежащую этой прямой?

4. Пересекающиеся прямые *a* и *b* пересекают параллельные плоскости и в четырех точках. Три из них *A, B* и *C* изображены на рисунке 5. Изобразите четвертую точку *D*. Ответ обоснуйте.

**13. Параллельные проекции плоских фигур**

Вариант 1

1. Изобразите параллельную проекцию прямоугольного равнобедренного треугольника, лежащего в плоскости, параллельной плоскости проектирования.

2. Изобразите параллельную проекцию равностороннего треугольника *ABC* и на ней постройте изображения перпендикуляров, опущенных из точки *M* – середины стороны *AB* на стороны *AC* и *BC*.

3. Изобразите параллельную проекцию правильного шестиугольника *ABCDEF*, взяв за исходную фигуру прямоугольник *ABDE*.

4. Изобразите параллельную проекцию равностороннего треугольника *ABC* и постройте на ней изображение перпендикуляра, опущенного из точки *K* – середины отрезка *BO* (*O* – центр треугольника) на сторону *AB*.

Вариант 2

1. Изобразите параллельную проекцию равностороннего треугольника, лежащего в плоскости, параллельной плоскости проектирования.

2. Изобразите параллельную проекцию квадрата *ABCD* и на ней постройте изображение перпендикуляров, опущенных из точки *E* – середины стороны *BC* на прямые *BD* и *AC.*

3. Изобразите параллельную проекцию правильного шестиугольника *ABCDEF*, взяв за исходную фигуру равносторонний треугольник *ACE*.

4. Изобразите параллельную проекцию прямоугольника *ABCD*, у которого *AD =* 2*AB*. Постройте изображение перпендикуляра, опущенного из вершины *C* на диагональ *BD*.

**14. Изображение пространственных фигур**

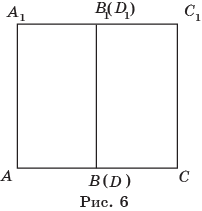
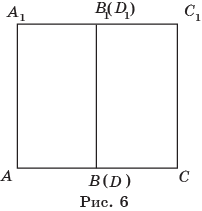
Вариант 1

1. Изобразите правильную четырехугольную пирамиду и ее высоту.

2. Изобразите куб, две грани которого параллельны плоскости проектирования.

3. На рисунке 6 изображена параллельная проекция куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Как расположен куб относительно плоскости проектирования?

4. Дан тетраэдр *ABCD*. Площадь его грани *ADC* равна *S*. Найдите площадь проекции его грани *BDC* на плоскость *ADC* в направлении прямой *AB*.

Вариант 2

1. Изобразите правильную треугольную пирамиду и ее высоту.

2. Изобразите куб, грани которого не параллельны плоскости проектирования.

3. На рисунке 7 изображена параллельная проекция куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Как расположен куб относительно плоскости проектирования?

4. Дан тетраэдр *ABCD*. Площадь его грани *ABD* равна *Q*. Найдите площадь проекции его грани *BDC* на плоскость *ADB* в направлении прямой *CM*, где *M* – середина ребра *AB*.

**15. Сечения многогранников**

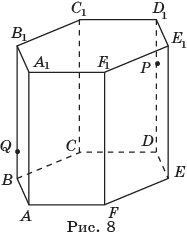
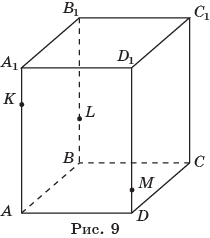
Вариант 1

1. В шестиугольной призме *ABCDEFA*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1 (рис. 8) постройте точку пересечения прямой *PQ* с плоскостью *ABC*, где точки *Q* и *P* принадлежат соответственно боковым ребрам призмы *BB*­1 и *DD*1.

2. На боковых ребрах четырехугольной призмы *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 заданы три точки *K, L, M* (рис. 9). Постройте линию пересечения плоскости *KLM* с плоскостью *ABC*.

3. Постройте сечение куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 плоскостью, проходящей через точки *X, Y, Z*, принадлежащие соответственно ребрам *AD, AA*1, *BB*1 и такие, что *AX*:*XD =* 1:2, *A*1*Y*:*YA* = 2:1, *B*1*Z*:*ZB* = 1:2.

4. В правильной пирамиде *SABCD* постройте сечение, проходящее через сторону основания *AD* и точку *M*, принадлежащую боковому ребру *SB*.

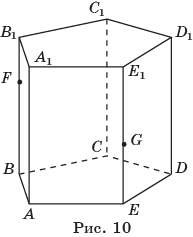
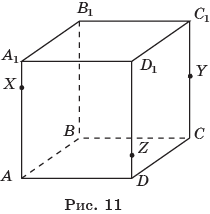
Вариант 2

1. На боковых ребрах *BB*1 и *EE*1 призмы *ABCDEA*1*B*1*C*1*D*1*E*1 заданы соответственно точки *F* и *G* (рис. 10). Постройте точку пересечения прямой *FG* с плоскостью *ABC*.

2. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. На его ребрах *AA*1, *CC*1 и *DD*1 заданы соответственно три точки *X, Y, Z* (рис. 11). Постройте линию пересечения плоскостей *XYZ* и *ABC*.

3. В правильной треугольной призме *A…C*1 постройте сечение, проходящее через точки *K, L* и *M*, принадлежащие соответственно ребрам *AA*1, *AC* и *BB*1 и такие, что: *AK = KA*1; *AL*:*LC =* 1:2 и *BM = MB*1.

4. В правильной пирамиде *SABCD* постройте сечение, проходящее через диагональ *AC* основания и параллельное боковому ребру *SD*.

**16. Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямых**

Вариант 1

1. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 найдите угол между прямыми: а) *AB* и *BB*1; б) *BD* и *ВВ*1; в) *AB*1 и *CC*1; г) *AB*1 и *CD*1.

2. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 отрезок *CD* перпендикулярен ребру *AB*. Найдите угол между прямыми: а) *CD* и *AA*1; б) *CD* и *A*1*B*1.

3. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* с равными ребрами найдите угол между диагональю *AC* основания и боковым ребром *SC*.

4. Найдите угол между скрещивающимися ребрами правильного тетраэдра.

Вариант 2

1. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 найдите угол между прямыми: а) *BC* и *BB*1; б) *A*1*C*1и *AD*; в) *BB*1 и *BD*; г) *A*1*D* и *BC*1.

2. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 *AM* – медиана основания *ABC*. Найдите угол между прямыми: а) *AM* и *C*1*B*1; б) *AM* и *A*1*C*1.

3. В правильном тетраэдре *ABCD* точка *M* – середина ребра *CB*. Найдите угол между прямыми *AM* и *DC*.

4. Найдите угол между непересекающимися ребрами правильной треугольной пирамиды.

**17. Перпендикулярность прямой и плоскости**

Вариант 1

1. Докажите, что прямая, перпендикулярная плоскости, пересекает эту плоскость.

2. Через центр *O* квадрата *ABCD* проведена прямая *OK*, перпендикулярная плоскости этого квадрата. Докажите, что прямая *AK* перпендикулярна прямой *BD*.

3. Найдите геометрическое место точек, принадлежащих прямым, проходящим через данную точку и перпендикулярным данной прямой.

4. Точка *M* принадлежит боковой грани *ABD* треугольной пирамиды *ABCD*, у которой *AB = BD* и *AC = CD*. Постройте сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через точку *M* и перпендикулярной прямой *AD*.

Вариант 2

1. Прямая *a*, перпендикулярная плоскости , пересекает эту плоскость в точке *A*. Докажите, что прямая *b*, проходящая через точку *A* и перпендикулярная прямой *a*, лежит в плоскости .

2. Через точку *M* – середину стороны *AB* равностороннего треугольника *ABC* проведена прямая *MH*, перпендикулярная плоскости этого треугольника. Докажите перпендикулярность прямых *AB* и *HC*.

3. Даны прямая *a* и не принадлежащая ей точка *A*. Найдите геометрическое место прямых, проходящих через точку *A* и перпендикулярных прямой *a*.

4. В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 постройте сечение, проходящее через точку *K*, внутреннюю точку диагонального сечения *AA*1*C*1*C*, и перпендикулярное прямой *BB*1.

**18. Перпендикуляр и наклонная**

Вариант 1

1. Дана плоскость . Из точки *A* проведены к ней две наклонные *AB* = 20 см и *AC* = 15 см. Проекция первой наклонной на эту плоскость равна 16 см. Найдите проекцию второй наклонной.

2. Из точки *M*, не принадлежащей плоскости , проведены к ней равные наклонные *MA, MB* и *MC*. Докажите, что основания наклонных принадлежат одной окружности. Найдите ее центр.

3. Из точки *B* проведены к плоскости две равные по 2 см наклонные. Угол между ними равен 60о, а между их проекциями – 900. Найдите перпендикуляр, опущенный из точки *B* на плоскость .

4. Дан треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Точка *M*, не принадлежащая плоскости этого треугольника, удалена от сторон треугольника на 5 см. Найдите перпендикуляр, опущенный из точки *M* на плоскость данного треугольника.

Вариант 2

1. Из точки *A* проведены к плоскости наклонная *AB* = 9 см и перпендикуляр *AO* = 6 см. Найдите проекцию этого перпендикуляра на данную наклонную.

2. Найдите геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от всех точек данной окружности.

3. Из данной точки проведены к данной плоскости две равные наклонные, образующие между собой угол 60о. Угол между их проекциями – прямой. Найдите угол между каждой наклонной и ее проекцией.

4. Точка *M* удалена от каждой вершины правильного треугольника на см, а от каждой его стороны – на 2 см. Найдите перпендикуляр, опущенный из точки *M* на плоскость треугольника.

**19. Угол между прямой и плоскостью**

Вариант 1

1. В пирамиде боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания. В какую точку проектируется вершина пирамиды?

2. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 найдите косинус угла между ребром *AA*1 и плоскостью *AB*1*D*1.

3. К плоскости проведена наклонная *MH* (*H* принадлежит плоскости ). Докажите, что если проекция наклонной *MH* образует равные углы с прямыми *AH* и *BH*, лежащими в плоскости , то и сама наклонная *MH* образует с ними равные углы.

4. Проведите к данной плоскости через данную на ней точку прямую, образующую с плоскостью угол 90о.

Вариант 2

1. Докажите, что в правильной пирамиде боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания.

2. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 найдите косинус угла между ребром *A*1*D*1 и плоскостью *AB*1*D*1.

3. К плоскости проведена наклонная *BP* (*P* принадлежит плоскости ), которая образует равные углы с прямыми *PE* и *PF*, лежащими в плоскости . Докажите, что углы, образованные прямыми *PE* и *PF* с проекцией наклонной *BP* на плоскость , равны.

4. Через точку, не принадлежащую данной плоскости, проведите прямую, образующую с плоскостью угол 90о.

**20. Расстояние между точками, прямыми и плоскостями**

Вариант 1

1. В прямоугольном треугольнике *ABC* (*C* = 90о) катет *AC* равен 8 см. Из вершины *B* к плоскости данного треугольника проведен перпендикуляр *BD*. Расстояние между точками *A* и *D* равно 10 см. Найдите расстояние от точки *D* до катета *AC*.

2. В единичном кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 найдите расстояние между вершиной *A* и: а) вершиной *C*1; б) ребром *CC*1; в) гранью *BB*1*C*1*C*.

3. Точка *M* удалена от всех вершин прямоугольного треугольникана расстояние *a*. Гипотенуза треугольника равна *c*. Найдите расстояние от точки *M* до плоскости данного треугольника.

4. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 с ребром *a* найдите расстояние между скрещивающимися ребрами *AB* и *B*1*C*1.

Вариант 2

1. Катеты прямоугольного треугольника *ABC* (*C* = 90о) равны 15 см и 20 см. Из вершины *C* к плоскости треугольника проведен перпендикуляр *CD*, равный 5 см. Найдите расстояние от точки *D* до гипотенузы *AB*.

2. В единичном кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 найдите расстояние между вершиной *D*1и: а) вершиной *B*; б) ребром *AB*; в) гранью *BB*1*C*1*C*.

3. Из точки *K* на плоскость опущен перпендикуляр длиной *d* и проведены две наклонные, углы которых с перпендикуляром составляют 30о. Угол между наклонными равен 600. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

4. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 с ребром *a* найдите расстояние между скрещивающимися ребрами *DC* и *BB*1.

**21. Двугранный угол**

Вариант 1

1. Наклонная, проведенная к плоскости, равна *a*. Найдите ортогональную проекцию этой наклонной на плоскость, если угол между наклонной и плоскостью равен 30о.

2. На одной грани двугранного угла взяты две точки *A* и *B*. Из них опущены перпендикуляры *AA*1, *BB*1 на другую грань и *AA*2, *BB*2 на ребро двугранного угла. Найдите *BB*2, если *AA*1 = 6 см, *BB*1 = 3 см, *AA*2 = 24 см.

3. Два равных прямоугольника имеют общую сторону и их плоскости образуют угол 45о. Найдите отношение площадей двух фигур, на которые ортогональная проекция стороны одного прямоугольника разбивает другой.

4. Докажите, что перпендикуляры, проведенные из точек данной прямой на плоскость, лежат в одной плоскости и геометрическим местом оснований этих перпендикуляров является линия пересечения этих плоскостей.

Вариант 2

1. Наклонная, проведенная к плоскости, равна *a*. Найдите ортогональную проекцию этой наклонной на плоскость, если угол между наклонной и плоскостью равен 60о.

2. На одной грани двугранного угла взяты две точки, отстоящие от его ребра на 9 см и 12 см. Расстояние от первой точки до другой грани двугранного угла равно 20 см. Найдите расстояние от этой грани до второй точки.

3. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание, а их плоскости образуют угол 60о. Общее основание равно 16 см, боковая сторона одного треугольника равна 17 см, а боковые стороны другого перпендикулярны. Найдите расстояние между вершинами треугольников, лежащими против общего основания.

4. Докажите, что точка пересечения ортогональных проекций двух прямых на плоскость является ортогональной проекцией точки пересечения данных прямых на ту же плоскость.

**22. Перпендикулярность плоскостей**

Вариант 1

1. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Докажите перпендикулярность плоскостей: а) *ABD* и *DCC*1; б) *AB*1*C*1 и *ABB*1.

2. Через данную прямую, лежащую в данной плоскости, проведите плоскость, перпендикулярную этой плоскости.

3. Две перпендикулярные плоскости и пересекаются по прямой *AB*. Прямая *CD* лежит в плоскости , параллельна *AB* и находится на расстоянии 60 см от нее. Точка *E* принадлежит плоскости и находится на расстоянии 91 см от *AB*. Найдите расстояние от точки *E* до прямой *CD*.

4. Докажите, что прямая *a* и плоскость , перпендикулярные одной и той же плоскости , параллельны, если прямая *a* не лежит в плоскости .

Вариант 2

1. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Докажите перпендикулярность плоскостей: а) *AA*1*D*1и *D*1*B*1*C*1; б) *A*1*B*1*D* и *BB*1*C*1.

2. Через наклонную к плоскости проведите плоскость, перпендикулярную этой плоскости.

3. Отрезок *MN* имеет концы на двух перпендикулярных плоскостях и составляет с ними равные углы. Докажите, что точки *M* и *N* одинаково удалены от линии пересечения данных плоскостей.

4. Докажите, что две плоскости и параллельны, если они перпендикулярны плоскости и пересекают ее по параллельным прямым.

**23\*. Центральное проектирование**

***Самостоятельная работа N 1***

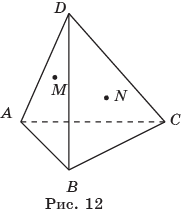
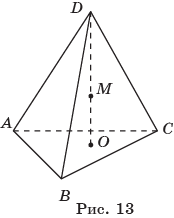
Вариант 1

1. Куда при центральном проектировании переходит прямая, параллельная плоскости проектирования?

2. Плоская фигура лежит в плоскости, параллельной плоскости проектирования, и находится между центром и плоскостью проектирования. Как при этом определяется коэффициент подобия фигуры и ее проекции?

3. Радиус основания конуса равен *R*. Через середину высоты проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите площадь сечения.

4. В треугольной пирамиде *ABCD* (рис. 12) через точки *M* и *N*, принадлежащие соответственно граням *ABD* и *BCD*, проведите сечение, параллельное ребру *AC*.

Вариант 2

1. В каком случае центральной проекцией двух прямых будут две параллельные прямые?

2. Плоская фигура лежит в плоскости, параллельной плоскости проектирования. Плоскость проектирования расположена между центром проектирования и плоскостью данной фигуры. Как при этом определяется коэффициент подобия фигуры и ее проекции?

3. Радиус основания конуса равен *R*. Он пересечен плоскостью, параллельной основанию и делящей высоту конуса в отношении *m*:*n*, считая от вершины. Найдите площадь сечения.

4. В треугольной пирамиде *ABCD* (рис. 13) через точку *M*, принадлежащую высоте пирамиды *DO*, проведите сечение, параллельное грани *BCD*.

***Самостоятельная работа N 2***

Вариант 1

1. Прямая *m* пересекает плоскость проектирования и не проходит через центр проектирования *S*. Изобразите центральную проекцию части данной прямой, расположенной в одном полупространстве с точкой *S* относительно плоскости .

2. Изобразите центральную проекцию куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 на плоскость, параллельную плоскости *AA*1*C*1.

3. Изобразите центральную проекцию правильной шестиугольной призмы на плоскость, параллельную ее основаниям.

4. Дана правильная четырехугольная пирамида *SABCD*, у которой двугранный угол при основании равен 60о. Найдите расстояние между прямыми *AB* и *SC*, если *AB* = 1.

Вариант 2

1. Прямая *m* пересекает плоскость проектирования и не проходит через центр проектирования *S*. Изобразите центральную проекцию части данной прямой, расположенной в разных полупространствах с точкой *S* относительно плоскости .

2. Изобразите центральную проекцию куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 на плоскость, параллельную плоскости *AB*1*C*1.

3. Изобразите центральную проекцию правильной шестиугольной призмы на плоскость, не параллельную ее основаниям.

4. Дана правильная треугольная призма *ABCA*1*B*1*C*1, все ребра которой равны 1. Найдите расстояние между прямыми *AA*1 и *BC*1.

**24. Многогранные углы**

Вариант 1

1. Запишите, при каких условиях углы , и могут быть плоскими углами трехгранного угла.

2. В трехгранном угле все плоские углы прямые. На его ребрах от вершины отложены отрезки 2 см, 4 см, 6 см и через их концы проведена плоскость. Найдите площадь получившегося сечения.

3. По скольким прямым попарно пересекаются плоскости всех граней четырехгранного угла?

Вариант 2

1. Два плоских угла трехгранного угла равны и , причем > . Запишите, в каких границах возможны значения третьего плоского угла данного трехгранного угла.

2. В трехгранном угле все двугранные углы – прямые. Из вершины этого угла в его внутренней области проведен отрезок, проекции которого на ребра равны *a*, *b* и *c*. Найдите данный отрезок.

3. По скольким прямым попарно пересекаются плоскости всех граней пятигранного угла?

**25\*. Выпуклые многогранники**

Вариант 1

1. Определите число вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) *n*-угольной призмы: а) выпуклой; б) невыпуклой.

2. Нарисуйте выпуклый многогранник с 5 вершинами.

3. В выпуклом многограннике известно число граней Г, причем каждая грань имеет одно и то же число сторон *n*. Найдите число: а) плоских углов (); б) ребер (Р) данного многогранника. Как связаны между собой числа и Р?

4. Выпуклый многогранник имеет В вершин, Р ребер и Г граней. От него отсекли *m*-гранный угол. Найдите число вершин, ребер и граней полученного многогранника.

Вариант 2

1. Определите число вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) *n*-угольной пирамиды: а) выпуклой; б) невыпуклой.

2. Нарисуйте выпуклый многогранник с 6 вершинами.

3. В выпуклом многограннике известно число вершин В, причем в каждой вершине сходится одно и то же число ребер *m*. Найдите число: а) плоских углов (); б) ребер данного многогранника (Р). Как связаны между собой числа и Р?

4. Выпуклый многогранник имеет В вершин, Р ребер и Г граней. К его *n*-угольной грани пристроили пирамиду. Найдите число вершин, ребер и граней нового многогранника.

**26\*. Теорема Эйлера**

Вариант 1

1. Нарисуйте невыпуклый многогранник, для которого выполняется теорема Эйлера.

2. Докажите, что для всякого выпуклого многогранника справедливо соотношение , где Р – число ребер, Г – число граней многогранника.

3. Докажите, что в любом выпуклом многограннике с В вершинами, Р ребрами и Г гранями выполняется неравенство: 3В – 6 Р.

4. Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды с высотой *h* и боковым ребром *b*.

Вариант 2

1. Нарисуйте невыпуклый многогранник, для которого не выполняется теорема Эйлера.

2. Докажите, что для всякого выпуклого многогранника справедливо соотношение , где Р – число ребер, В – число вершин многогранника.

3. Докажите, что в любом выпуклом многограннике с В вершинами, Р ребрами и Г гранями выполняется неравенство: 3Г – 6 Р.

4. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды со стороной основания *a* и высотой боковой грани *h*.

**27. Правильные многогранники**

Вариант 1

1. Нарисуйте: а) развертку тетраэдра; б) многогранник, двойственный гексаэдру.

2. Постройте сечение октаэдра плоскостью, проходящей через одну из его вершин и середины двух параллельных ребер, которым не принадлежит данная вершина. Определите вид сечения.

3. В тетраэдр *ABCD* вписана правильная треугольная призма с равными ребрами таким образом, что вершины одного ее основания находятся на боковых ребрах *AD, BD, CD*, а другого – в плоскости *ABC*. Ребро тетраэдра равно *a*. Найдите ребро призмы.

4. В тетраэдре *ABCD* проведите сечение плоскостью, проходящей через точку *M* – середину высоты *DO* тетраэдра, параллельно плоскости грани *ADC*. Определите вид сечения.

Вариант 2

1. Нарисуйте: а) развертку куба; б) многогранник, двойственный тетраэдру.

2. Постройте сечение октаэдра плоскостью, проходящей через два его параллельных ребра. Определите вид сечения.

3. В октаэдр вписан куб таким образом, что его вершины находятся на ребрах октаэдра. Ребро октаэдра равно *a*. Найдите ребро куба.

4. В тетраэдре *ABCD* проведите сечение плоскостью, проходящей через точку *M*, принадлежащую грани *ABC* параллельно плоскости грани *BCD*. Определите вид сечения.

**28\*. Полуправильные многогранники**

Вариант 1

1. Найдите число вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) усеченного гексаэдра.

2. Как можно получить 5-угольную антипризму?

3. Нарисуйте многогранник, двойственный правильной 6-угольной призме.

4. Правильный треугольник *ABC* и другой треугольник *ADC* имеют общую сторону *AC* и расположены в разных плоскостях, угол между которыми равен 30о. Вершина *D* ортогонально проектируется на плоскость треугольника *ABC* в его центр. Высота правильного треугольника равна *h*. Найдите сторону *AD* треугольника *ADC*.

Вариант 2

1. Найдите число вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) усеченного октаэдра.

2. Как можно получить 8-угольную антипризму?

3. Нарисуйте многогранник, двойственный 6-угольной антипризме.

4. Квадрат *ABCD* и треугольник *ABE* имеют общую сторону *AB* и расположены в разных плоскостях, угол между которыми равен 45о. Вершина *E* треугольника ортогонально проектируется на плоскость квадрата в его центр *O*. Высота *EH* треугольника равна *h*. Найдите площадь ортогональной проекции треугольника на плоскость квадрата и ортогональную проекцию отрезка *OE* на плоскость треугольника.

**29\*. Звездчатые многогранники**

Вариант 1

1. Как получить звезду Кеплера из октаэдра?

2. Найдите число вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) малого звездчатого додекаэдра.

3. Каким образом из куба получается усеченный куб? Чему равно его ребро, если ребро куба равно *a*?

4. Докажите, что если плоскость пересекает треугольную пирамиду и параллельна двум ее скрещивающимся ребрам, то в сечении будет параллелограмм.

Вариант 2

1. Как получить звезду Кеплера из гексаэдра?

2. Найдите число вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) большого додекаэдра.

3. Каким образом из куба получается кубооктаэдр? Чему равно его ребро, если ребро куба равно *a*?

4. Докажите, что правильный тетраэдр можно пересечь плоскостью таким образом, чтобы в сечении получился квадрат.

**30\*. Кристаллы – природные многогранники**

Вариант 1

1. Нарисуйте кристалл горного хрусталя.

2. Нарисуйте ромбододекаэдр. Чему равно число его вершин, ребер и граней.

3. Найдите сумму всех плоских углов кристалла исландского шпата.

4. Найдите сумму площадей всех граней кристалла алмаза (в виде кубооктаэдра), если его ребро равно *a*.

Вариант 2

1. Нарисуйте кристалл исландского шпата.

2. Нарисуйте ромбододекаэдр. Определите число его плоских углов, двугранных углов; многогранных углов и их тип.

3. Найдите сумму всех плоских углов кристалла граната.

4. Найдите сумму площадей всех граней кристалла алмаза (в виде усеченного октаэдра), если его ребро равно *a*.

**31. Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости**

Вариант 1

1. Шар, радиус которого равен 10 см, пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 см от центра. Найдите площадь сечения.

2. Сечения шара радиуса *R* двумя параллельными плоскостями имеют радиусы *r*1 и *r*2. Найдите расстояние между этими плоскостями, если они расположены по разные стороны от центра.

3. Стороны треугольника касаются сферы. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 5 см, а стороны треугольника равны 12 см, 10 см, 10 см.

4. Каждая сторона ромба касается сферы радиуса 10 см. Плоскость ромба удалена от центра сферы на 8 см. Найдите площадь ромба, если его сторона равна 12,5 см.

Вариант 2

1. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярно к нему плоскость. Как относится площадь большого круга данного шара к площади получившегося сечения?

2. Сечения шара радиуса *R* двумя параллельными плоскостями имеют радиусы *r*1 и *r*2. Найдите расстояние между этими плоскостями, если они расположены по одну сторону от центра.

3. Стороны ромба касаются сферы радиуса 13 см. Найдите расстояние от плоскости ромба до центра сферы, если диагонали ромба равны 30 см и 40 см.

4. Через конец радиуса шара проведена плоскость, составляющая с ним 30о. Найдите площадь сечения шара этой плоскостью, если радиус шара равен 6 см.

**32. Многогранники, вписанные в сферу**

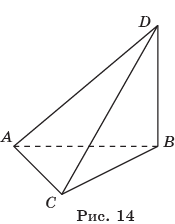
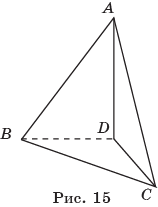
Вариант 1

1. Перечислите свойства, которым должна удовлетворять призма, чтобы около нее можно было описать сферу.

2. На рисунке 14 изображена треугольная пирамида *ABCD*, у которой ребро *DB* перпендикулярно плоскости *ABC* и угол *ACB* равен 90о. Найдите центр сферы, описанной около данной пирамиды.

3. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* сторона основания *ABCD* равна 4 см, двугранный угол при основании 45о. Найдите радиус описанной сферы. Где будет находиться ее центр?

4. Радиус сферы, описанной около правильной четырехугольной призмы, равен *R*. Найдите высоту этой призмы, зная, что ее диагональ образует с боковой гранью угол .

Вариант 2

1. Перечислите свойства, которым должна удовлетворять пирамида, чтобы около нее можно было описать сферу.

2. На рисунке 15 изображена пирамида *ABCD*, у которой углы *ADB, ADC* и *BDC* прямые. Найдите центр сферы, описанной около данной пирамиды.

3. В правильной треугольной пирамиде *SABC* центр описанной сферы делит высоту на части, равные 6 см и 3 см. Найдите сторону основания *ABC* пирамиды.

4. В правильной 4-угольной призме диагональ основания и диагональ боковой грани равны соответственно 16 см и 14 см. Найдите радиус описанной сферы.

**33. Многогранники, описанные около сферы**

Вариант 1

1. Можно ли вписать сферу в пирамиду, у которой равны двугранные углы при основании? Ответ поясните.

2. Около сферы описана прямая призма, основанием которой является ромб с диагоналями 6 см и 8 см. Найдите площадь основания и высоту призмы.

3. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна *a*, двугранный угол при основании равен 60о. Найдите радиус вписанного шара.

4. Стороны оснований правильной 4-угольной усеченной пирамиды равны 1 см и 7 см. Боковое ребро наклонено к основанию под углом 45о. Найдите радиус описанного шара.

Вариант 2

1. Каким свойством должна обладать прямая треугольная призма, чтобы в нее можно было вписать сферу?

2. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, каждый из равных углов которого равен и основание которого равно *a*. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом . Найдите радиус сферы, вписанной в эту пирамиду.

3. Найдите радиус шара, вписанного в правильную пирамиду, у которой высота равна *h*, а двугранный угол при основании равен 450.

4. В правильной треугольной усеченной пирамиде высота равна 17 см, радиусы окружностей, описанных около оснований, равны 5 см и 12 см. Найдите радиус описанного шара.

**34. Цилиндр. Конус**

Вариант 1

1. В цилиндре, радиус основания которого равен 4 см и высота 6 см, проведено сечение, параллельное оси. Расстояние между диагональю сечения и осью цилиндра равно 2 см. Найдите площадь сечения.

2. Через вершину конуса проведено сечение под углом 60о к его основанию. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения, если высота конуса равна 12 см.

3. Точка *M* принадлежит высоте конуса. Точка *N* принадлежит плоскости основания конуса, но находится вне этого основания. Постройте точку пересечения прямой *MN* с поверхностью конуса.

4. Диагонали осевого сечения усеченного конуса перпендикулярны, высота равна 2 см. Найдите площадь сечения усеченного конуса, проведенного через середину высоты параллельно основаниям.

Вариант 2

1. Высота цилиндра равна 15 см, радиус основания 10 см. Дан отрезок, концы которого принадлежат окружностям обоих оснований и длина которого равна 3 см. Найдите расстояние между данным отрезком и осью цилиндра.

2. Через вершину конуса проведено сечение под углом 30о к его высоте. Найдите площадь сечения, если высота конуса равна 3 см, а радиус основания 5 см.

3. В конусе задано осевое сечение. Точки *K* и *L* принадлежат двум образующим конуса, не лежащим в данном сечении. Постройте точку пересечения прямой *KL* с плоскостью данного осевого сечения.

4. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 1:3, образующая составляет с плоскостью основания угол 450, высота равна *h*. Найдите площади оснований.

**35. Поворот. Фигуры вращения**

Вариант 1

1. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении квадрата *ABCD* вокруг прямой *a*, проходящей через вершину *B* и перпендикулярной диагонали *BD*.

2. Нарисуйте фигуру, которая получается вращением круга вокруг касательной.

3. Кривая задана уравнением *y =* sin *x*, 0*x*. Нарисуйте фигуру, которая получится при вращении этой кривой вокруг оси *Oy*.

4. Плоскость проходит через ось цилиндра, причем площадь осевого сечения цилиндра относится к площади его основания как 4: . Найдите угол между диагоналями осевого сечения.

Вариант 2

1. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении ромба *ABCD* вокруг прямой *a*, проходящей через вершину *C* и перпендикулярной диагонали *AC*.

2. Нарисуйте фигуру, которая получается вращением круга вокруг хорды, не являющейся диаметром.

3. Кривая задана уравнением *y =* , 0*x*4. Нарисуйте фигуру, которая получится при вращении этой кривой вокруг оси *Ox*.

4. Высота конуса равна 20 см, угол между нею и образующей 60о. Найдите площадь сечения, проведенного через две взаимно перпендикулярные образующие конуса.

**36. Вписанные и описанные цилиндры**

Вариант 1

1. В сферу радиуса 10 см вписан цилиндр, диагональ осевого сечения которого наклонена к плоскости основания под углом 300. Найдите высоту цилиндра и радиус его основания.

2. Найдите радиус основания цилиндра, описанного около сферы радиуса *R*.

3. В равносторонний цилиндр (высота равна диаметру основания), радиус основания которого равен *r*, вписана правильная треугольная призма. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через ось цилиндра и боковое ребро призмы.

4. Около равностороннего цилиндра, радиус основания которого равен *r*, описана правильная четырехугольная призма. Найдите площади ее граней.

Вариант 2

1. В сферу вписан цилиндр, образующая которого равна 8 см и диагональ осевого сечения наклонена к плоскости основания под углом 600. Найдите радиусы сферы и основания цилиндра.

2. Найдите образующую цилиндра, описанного около сферы радиуса *R*.

3. В равносторонний цилиндр (высота равна диаметру основания), радиус основания которого равен *r*, вписана правильная четырехугольная призма. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через ось цилиндра и боковое ребро призмы.

4. Около равностороннего цилиндра, радиус основания которого равен *r*, описана правильная треугольная призма. Найдите площади ее граней.

**37\*. Сечения цилиндра плоскостью. Эллипс**

Вариант 1

1. Изобразите цилиндр и эллипс, являющийся пересечением боковой поверхности цилиндра плоскостью, образующей с основанием цилиндра угол 45о.

2. Боковая поверхность цилиндра пересечена плоскостью, образующей с осью цилиндра угол 30о. Найдите большую ось эллипса, получившегося в сечении, если радиус основания цилиндра равен *R*.

3. Плоскость пересекает боковую поверхность цилиндра и образует с плоскостью основания угол 30о. Найдите расстояние между фокусами эллипса, получившегося в сечении, если радиус основания цилиндра равен 3 см.

4. Цилиндр, радиус основания которого равен *R*, пересечен плоскостью, образующей с основанием цилиндра угол 45о. Найдите сумму расстояний от точек эллипса, получившегося в сечении, до фокусов.

Вариант 2

1. Изобразите цилиндр и эллипс, являющийся пересечением боковой поверхности цилиндра плоскостью, образующей с основанием цилиндра угол 60о.

2. Под каким углом к плоскости основания цилиндра нужно провести плоскость, чтобы в сечении боковой поверхности получить эллипс, у которого большая ось в два раза больше малой?

3. Плоскость пересекает боковую поверхность цилиндра и образует с плоскостью основания угол 45о. Найдите расстояние между фокусами эллипса, получившегося в сечении, если радиус основания цилиндра равен 2 см.

4. Цилиндр, радиус основания которого равен *R*, пересечен плоскостью, образующей с основанием цилиндра угол 30о. Найдите сумму расстояний от точек эллипса, получившего в сечении, до фокусов.

**38. Вписанные и описанные конусы**

Вариант 1

1. В сферу радиуса 4 см вписан конус. Найдите высоту этого конуса и радиус его основания, если угол при вершине осевого сечения равен 60о.

2. Радиус основания конуса равен *r*, образующая наклонена к плоскости основания под углом 60о. Найдите радиус вписанной в конус сферы.

3. Можно ли вписать в конус 4-угольную пирамиду, у которой углы основания последовательно относятся как: а) 1:5:9:7; б) 4:2:5:7?

4. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция с основаниями 8 см и 18 см; двугранные углы при основании пирамиды равны. В пирамиду вписан конус. Найдите радиус основания конуса и его высоту, если меньшее боковое ребро пирамиды составляет с меньшей стороной трапеции угол 60о.

Вариант 2

1. В конусе образующая равна 15 см и составляет с основанием угол 600. Найдите радиус описанной сферы.

2. В конус вписана сфера, радиус которой равен *R*. Найдите радиус основания конуса, если угол при вершине осевого сечения равен 600.

3. Можно ли описать около конуса 4-угольную пирамиду, у которой стороны основания последовательно относятся как: а) 5:6:8:7; б) 3:10:15:7?

4. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник; боковые ребра равны между собой, а боковые грани, проходящие через катеты, составляют с основанием углы 30о и 60о. Около пирамиды описан конус таким образом, что у них общая высота. Найдите радиус основания конуса, если высота пирамиды равна *h*.

**39\*. Конические сечения**

Вариант 1

1. Образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом 60о. Радиус основания конуса равен *R*. Через центр основания проведена плоскость под углом 60о к плоскости основания. Найдите радиус сферы, вписанной в коническую поверхность и касающуюся этой плоскости.

2. Изобразите конус и плоскость, пересекающую коническую поверхность по эллипсу.

3. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 90о. Под каким углом к плоскости основания конуса нужно провести плоскость, чтобы в сечении конической поверхности получить: а) эллипс; б) параболу; в) гиперболу?

4. Угол между осью конуса и его образующей равен 45о. Через точку образующей, отстоящую от вершины конуса на расстояние *a*, проведена плоскость, перпендикулярная этой образующей. Найдите расстояние между фокусом и директрисой параболы, получающейся в сечении конической поверхности этой плоскостью.

Вариант 2

1. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 90о. Через точку образующей, отстоящей от вершины конуса на расстояние *a*, проведена плоскость, перпендикулярная этой образующей. Найдите радиус сферы, вписанной в коническую поверхность, касающуюся этой плоскости.

2. Изобразите конус и плоскость, пересекающую коническую поверхность по параболе.

3. Образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом 60о. Под каким углом к плоскости основания нужно провести плоскость, чтобы в сечении конической поверхности получить: а) эллипс; б) параболу; в) гиперболу?

4. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 30о. Через точку образующей, отстоящей от вершины на расстояние *b*, проведена плоскость, перпендикулярная этой образующей. Найдите большую ось эллипса, получившегося в сечении конической поверхности этой плоскостью.

**40. Симметрия пространственных фигур**

Вариант 1

1. Для двух точек пространства найдите точку, относительно которой они центрально симметричны.

2. Постройте прямую, зеркально-симметричную данной прямой относительно данной плоскости . Рассмотрите различные случаи.

3. Докажите, что при осевой симметрии плоскость, перпендикулярная оси, переходит в себя.

4. Найдите элементы симметрии правильной треугольной призмы.

Вариант 2

1. Для двух точек пространства найдите прямую, относительно которой они симметричны.

2. Постройте плоскость, центрально-симметричную данной плоскости относительно точки *O*. Рассмотрите различные случаи.

3. Докажите, что при осевой симметрии прямые, перпендикулярные оси, переходят в прямые, также перпендикулярные оси.

4. Найдите элементы симметрии правильной 6-ой пирамиды.

**41. Движения**

Вариант 1

1. Докажите, что композиция двух движений (последовательное их выполнение) является движением.

2. Найдите движения, которые переводят вершину *A* куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 в вершину *C*1.

3. Найдите движения, которые переводят вершину *A* правильного тетраэдра *ABCD* в вершину *C*.

4. Каким движением является композиция (последовательное выполнение) двух осевых симметрий с параллельными осями?

Вариант 2

1. Докажите, что преобразование, обратное движению, тоже является движением.

2. Найдите движения, которые переводят вершину *B*1 куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 в вершину *D*.

3. Найдите движения, которые переводят вершину *D* правильного тетраэдра *ABCD* в вершину *B*.

4. Каким движением является композиция (последовательное выполнение) двух центральных симметрий?

**42\*. Ориентация поверхности. Лист Мебиуса**

Вариант 1

1. Сколько сторон имеет поверхность: а) пирамиды; б) призмы; в) дважды перекрученной ленты Мебиуса?

2. Изобразите лист Мебиуса.

3. Лист Мебиуса получен из прямоугольника со сторонами *a, b* (*a*<*b*) склеиванием сторон длины *a*. Какова площадь поверхности листа Мебиуса?

4. Можно ли одностороннюю поверхность склеить из шестиугольника?

Вариант 2

1. Сколько сторон имеет поверхность: а) конуса; б) цилиндра; в) листа Мебиуса?

2. Изобразите дважды перекрученную ленту Мебиуса.

3. Лист Мебиуса получен из прямоугольника со сторонами *a, b* (*a*<*b*) склеиванием сторон длины *a*. Какова длина края листа Мебиуса?

4. Можно ли одностороннюю поверхность склеить из восьмиугольника?

**43. Объем фигур в пространстве. Объем цилиндра**

Вариант 1

1. Осевое сечение прямого кругового цилиндра - квадрат со сторо­ной 3 см. Найдите объем цилиндра.

2. От куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1, ребро которого равно 1, отсечены 4 треугольные призмы плоскостями, которые проходят через середины смежных сторон грани *ABCD*, параллельно ребру *AA*1. Найдите объем оставшейся части куба.

3. Прямая треугольная призма пересечена плоскостью, которая проходит через боковое ребро и делит площадь противолежащей ему боковой грани в отношении *m*:*n*. В каком отношении делится объем призмы?

4. Основанием прямого параллелепипеда является ромб, диагонали которого относятся как 5:2. Зная, что диагонали параллелепипеда равны 17 дм и 10 дм, найдите объем параллелепипеда.

Вариант 2

1. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 2 см и наклонена к плос­кости основания под углом 60о. Найдите объем цилиндра.

2. Объем правильной шестиугольной призмы равен *V*. Определите объем призмы, вершинами которой являются середины сторон оснований данной призмы.

3. В каком отношении делится объем прямой треугольной призмы плоскостью, проходящей через средние линии оснований.

4. Основанием прямого параллелепипеда является ромб, диагонали которого равны 1 дм и 7 дм. Зная, что диагонали параллелепипеда относятся как 13:17, найдите объем параллелепипеда.

**44. Принцип Кавальери**

Вариант 1

1. Верно ли, что два конуса, имеющие равные основания и высоты, равнове­лики?

1. Найдите объем наклонной призмы, площадь основания ко­торой равна *S*, а боковое ребро *b* наклонено к плоскости основания под углом 600.

3. В наклонном параллелепипеде две боковые грани имеют площади *S*1 и *S*2, их общее ребро равно *a*, и они образуют между собой двугранный угол 150о. Найдите объем параллелепипеда.

4. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней равна *Q*, а расстояние от нее до противоположного ребра равно *d*. Найдите объем призмы.

Вариант 2

1. Верно ли, что две пирамиды, имеющие равновеликие основания и равные высоты, равнове­лики?

2. Найдите объем наклонного цилиндра, радиус основания ко­торого равен *R*, а боковое ребро *b* наклонено к плоскости основания под углом 45о.

3. В наклонном параллелепипеде основание и боковая грань являются прямоугольниками и их площади равны соответственно 20 см2 и 24 см2. Угол между их плоскостями равен 30о. Еще одна грань параллелепипеда имеет площадь 15 см2. Найдите объем параллелепипеда.

4. В наклонной треугольной призме две боковые грани перпендикулярны и имеют общее ребро, равное *a*. Площади этих граней равны *S*1 и *S*2. Найдите объем призмы.

**45. Объем пирамиды**

Вариант 1

1. Пирамида, объем которой равен *V*, а в основании лежит прямоугольник, пересечена четырьмя плоскостями, каждая из которых проходит через вершину пирамиды и середины смежных сторон основания. Найдите объем оставшейся части пирамиды.

2. Основанием пирамиды является равносторонний треугольник со стороной, равной 1. Две ее боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а третья образует с основанием угол 60о. Найдите объем пирамиды.

3. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 3 см, а прилежащий к нему острый угол равен 30о. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60о. Найдите объем пирамиды.

4. Центры граней куба, ребро которого равно 2*a*, служат верши­нами октаэдра. Найдите его объем.

Вариант 2

1. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее диагональным сечением является правильный треугольник со стороной, равной 1.

2. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60о. Высота пирамиды равна 3 см. Найдите объем пирамиды.

3. Боковые грани пирамиды, в основании которой лежит ромб, наклонены к плоскости основания под углом 30о. Диагонали ромба равны 10 см и 24 см. Найдите объем пирамиды.

4. В куб с ребром, равным *a*, вписан правильный тетраэдр таким образом, что его вершины совпадают с четырьмя вершинами куба. Найдите объем тетраэдра.

**46. Объем конуса**

##### Вариант 1

1. Диаметр основания конуса равен 12 см, а угол при вершине осевого сечения равен 90о. Найдите объем конуса.

2. Два конуса имеют общую высоту и параллельные основания. Найдите объем их общей части, если объем каждого конуса равен *V*.

3. В конус, объем которого равен *V*, вписан цилиндр. Найдите объем цилиндра, если отношение диаметров оснований конуса и цилиндра равно 10:9.

4. Каждое ребро правильной 4-угольной пирамиды равно *a*. Плоскость, параллельная плоскости основания пирамиды, отсекает от нее усеченную пирамиду. Найдите объем усеченной пирамиды, если сторона сечения равна *b*.

##### Вариант 2

1. Осевым сечением конуса служит равнобедренный прямоугольный треугольник площади 9 см2. Найдите объем конуса.

2. В конус вписан другой конус таким образом, что центр основания вписанного конуса делит высоту данного конуса в отношении 3:2, считая от вершины конуса, а вершина вписанного конуса находится в центре основания данного конуса. Найдите отношение объемов данного и вписанного конусов.

3. Докажите, что если два равных конуса имеют общую высоту и параллельные плоскости оснований, то объем их общей части составляет объема каждого из них.

4. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 см и 5 см. Найдите отношение объемов частей усеченного конуса, на которые он делится средним сечением.

**47. Объем шара и его частей**

##### Вариант 1

1. Найдите отношение объема шара к объему вписанного в него куба.

2. Найдите отношение объема шара к объему описанного около него октаэдра.

3. В шаре проведена плоскость, перпендикулярная диаметру и делящая его на части, равные 3 см и 9 см. Найдите объемы частей шара.

4. Радиус шарового сектора *R*, угол в осевом сечении 120о. Найдите объем шарового сектора.

##### Вариант 2

1. Найдите отношение объема шара к объему вписанного в него октаэдра.

2. Найдите отношение объема шара к объему описанного около него куба.

3. В шаре радиуса 13 см проведены по разные стороны от центра два равных параллельных сечения радиуса 5 см. Найдите объем полученного шарового слоя.

4. Найдите объем шарового сектора, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара 75 см.

**48. Площадь поверхности**

##### Вариант 1

1. Плоскость, проходящая через сторону основания правильной треугольной призмы и середину противолежащего ребра, образует с основанием угол 450, а сторона основания равна *a*. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

2. Основанием пирамиды является квадрат, сторона которого равна *a*. Две грани пирамиды перпендикулярны основанию, а остальные две боковые грани наклонены к нему под углом 60о. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна *b*; сечение, проведенное через противоположные стороны оснований, составляет с плоскостью основания угол . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, описанного около данной призмы.

4. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 60о; площадь большого круга, вписанного в этот конус шара, равна *Q*. Найдите площадь полной поверхности конуса.

##### Вариант 2

1. В правильной 4-угольной призме сторона основания равна *a*. Плоскость, проведенная через противоположные стороны оснований, составляет с одним из них угол 60о. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

2. Две боковые грани треугольной пирамиды перпендикулярны ее основанию; высота пирамиды равна *h*; плоские углы при вершине равны 60о, 60о и 90о. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

3. В правильной треугольной призме боковое ребро равно *b*; отрезок, соединяющий середину бокового ребра с центром основания, составляет с основанием угол . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в данную призму.

4. В конусе образующая составляет с основанием угол 60о; площадь большого круга описанного шара равна *Q*. Найдите площадь полной поверхности конуса.

**49. Площадь поверхности шара и его частей**

##### Вариант 1

1. Докажите, что площадь полной поверхности равностороннего конуса (осевое сечение – равносторонний треугольник) равна площади поверхности шара, имеющего диаметром высоту конуса.

2. Найдите площадь поверхности шара, вписанного в равносторонний цилиндр (осевое сечение – квадрат), диагональ осевого сечения которого равна *a*.

3. Радиусы оснований шарового пояса равны 10 см и 12 см, а его высота равна 11 см. Найдите площадь поверхности шарового пояса.

4. Радиус шарового сегмента равен *R*, дуга осевого сечения составляет 90о. Найдите площадь полной поверхности сегмента.

Вариант 2

1. Докажите, что если равносторонний конус (осевое сечение – равносторонний треугольник) и полушар имеют общее основание, то площадь боковой поверхности конуса равна площади поверхности полушара.

2. Найдите отношение площадей поверхностей двух шаров, один из которых вписан, а второй описан около равностороннего цилиндра (осевое сечение – квадрат).

3. Радиус шара равен 25 см. Найдите площади частей, на которые делится поверхности шара сечением, площадь которого равна 49 см2.

4. Высота шарового сегмента равна *h*, дуга осевого сечения равна 120о. Найдите площадь полной поверхности сегмента.

**50. Прямоугольная система координат в пространстве**

Вариант 1

1. Постройте по координатам точки: *A*(1, 2, 3); *B*(-2, 0, 3); *C*(0, 0, -4); *D*(3, -1, 0).

2. Среди данных точек *K*(-6, 0, 0), *L*(10, -5, 0), *M*(0, 6, 0), *N*(7, -8, 0), *P*(0, 0, -20), *Q*(0, 11, -2) найдите те, которые принадлежат: а) оси *Oy*; б) оси *Oz*; в) плоскости *Oxy*; г) плоскости *Oyz*.

3. Найдите координаты оснований перпендикуляров, опущенных из данных точек *E*(6, -2, 8) и *F*(-3, 2, -5) на: а) ось *Ox*; б) плоскость *Oxz*.

4. Найдите координаты середины отрезка *GH*, если *G*(2, -3, 5), *H*(4, 1, -3).

5. Найдите координаты точек, симметричных точкам *U*(8, 0, 6), *V*(20, -14, 0) относительно: а) плоскости *Oyz*; б) оси *Ox*.

Вариант 2

1. Постройте по координатам точки: *E*(-1, 2, 0); *F*(1, 0, -4); *G*(2, 3, -1); *H*(0, -2, 0).

2. Среди точек *A*(0, -1, 0), *B*(0, 1, -3), *C*(4, 0, 0), *D*(0, 0, -5), *E*(-1, 0, 7), *F*(0, 10, 10) найдите те, которые принадлежат: а) оси *Ox*; б) оси *Oy*; в) плоскости *Oyz*; г) плоскости *Oxz*.

3. Найдите координаты оснований перпендикуляров, опущенных из точек *M*(9, -1, -6) и *N*(-12, 5, 8) на: а) ось *Oz*; б) плоскость *Oxy*.

4. Найдите координаты середины отрезка *GH*, если *G*(3, -2, 4), *H*(5, 2, -6).

5. Найдите координаты точек, симметричных точкам *P*(0, 0, 5), *V*(0, -1, -2) относительно: а) плоскости *Oxy*; б) оси *Oy*.

**51. Расстояние между точками в пространстве**

Вариант 1

1. Определите, являются ли точки *A*(2, 3, 4), *B*(1, 2, 3), *C*(3, 4, 5) вершинами треугольника.

2. Найдите координаты точки, принадлежащей оси *Oz* и одинаково удаленной от точек *M*(-1, -2, 0) и *N*(3, 0, 4).

3. Запишите уравнение сферы с центром в точке *C*(-2, 0, 3) и: а) радиусом ; б) проходящей через точку *K*(1, -4, 3).

4. Найдите координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением *x*2 + 8*y* + *y*2 + *z*2 – 6*x* =0.

5. Сфера *x*2 + *y*2 + *z*2 +4*x* – 2*y* =0 пересечена плоскостью *Oyz*. Найдите координаты центра и радиус окружности, лежащей в сечении.

Вариант 2

1. Определите, являются ли точки *E*(-4, -5, -6), *F*(-1, -2, -3), *G*(-2, -3, -4) вершинами треугольника.

2. Найдите координаты точки, принадлежащей оси *Oy* и одинаково удаленной от точек *K*(1, 3, 0) и *L*(4, -1, 3).

3. Запишите уравнение сферы с центром в точке *C*(0, -5, 6) и: а) радиусом 10; б) проходящей через точку *H*(2, -3, 5).

4. Найдите координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением *x*2 + *y*2 + *z*2 – 8*z* - 20 =0.

5. Сфера *x*2 + *y*2 + *z*2 +2*x* – 6*z* =0 пересечена плоскостью *Oxy*. Найдите координаты центра и радиус окружности, лежащей в сечении.

**52. Координаты вектора**

Вариант 1

1. Найдите координаты вектора: а) 2 + 3 - 4; б) -5 + 10; в) - +.

2. Найдите длину вектора: а) (1, -2, 10); б) , если *A*(0, -5, 1), *B*(2, 0, -8); в) + , если (6, 2, -6), (2, -2, 0).

3. Найдите координаты точки *C*, если: а) (-5, 6, 8), *D*(0, -1, 2); б) *D*(-13, , 6), (-5, 0, 0).

4. Найдите числа *x, y, z*, чтобы выполнялось равенство = , если (5, -2, 0), (0, 2, -6), (-5, 0, -8), (-5, 2, -4).

Вариант 2

1. Найдите координаты вектора: а) 3 - 4 + 2; б) -2 - ; в) - .

2. Найдите длину вектора: а) (0,-3,2); б) , если *M*(0, -5, 1), *N*(2, 0, -8); в) - , если (0, -2, 6), (-5, 0, 3).

3. Найдите координаты точки *E*, если: а) (0, -3, 11), *F*(5, -1, 0); б) *F*(5, 0, -9), (-2, 4, -6).

4. Найдите числа *u, v, w*, чтобы выполнялось равенство =, если (-30, 6, -12), (5, -6, 0), (10, -3, 2), (0, 1, 2).

**53. Скалярное произведение векторов**

Вариант 1

1. Определите знак скалярного произведения векторов и , если угол между ними удовлетворяет неравенствам: а) 0о< <90о; б) 90о< <180о.

2. Угол между векторами и равен 90о. Чему равен угол между векторами: а) и ; б) и ?

3. Докажите равенство: а) б)

4. В правильном тетраэдре *ABCD* с ребром, равным 1, найдите скалярное произведение: а) ; б) ; в) , где *H* и *Q* – середины соответственно ребер *AC* и *BD*.

Вариант 2

1. Определите, в каком промежутке находится угол между векторами и , если: а) < 0; б) > 0.

2. Угол между векторами и равен 90о. Чему равен угол между векторами: а) и ; б) и ?

3. Докажите равенство: а) ; б) .

4. В правильном тетраэдре *ABCD* с ребром, равным *a*, найдите скалярное произведение: а) ; б) ; в) , где *E* и *F* – середины соответственно ребер *BC* и *AD*.

**54. Уравнение плоскости в пространстве**

Вариант 1

1. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку *H*(-3, 0, 7) и перпендикулярную вектору с координатами (1, -1, 3).

2. Найдите координаты точки пересечения плоскости 2*x* – *y* + 3*z* – 1 = 0 с осью: а) абсцисс; б) ординат.

3. Напишите уравнение плоскости, если она проходит через точку *B*(3, -2, 2) и: а) параллельна плоскости *Oyz*; б) перпендикулярна оси *Ox*.

4. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку *M*(5, -1, 3) и перпендикулярна вектору , если *N*(0, -2, 1).

Вариант 2

1. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку *P*(5, -1, 0) и перпендикулярную вектору с координатами (0, -6, 10).

2. Найдите координаты точки пересечения плоскости *x* + 4*y* - 6*z* – 7 = 0 с осью: а) ординат; б) аппликат.

3. Напишите уравнение плоскости, если она проходит через точку *C*(2, -4, -3) и: а) параллельна плоскости *Oxz*; б) перпендикулярна оси *Oy*.

4. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку *E* и перпендикулярна вектору (4, -5, 0), если *F*(3, -1, 6).

**55\*. Уравнение прямой в пространстве**

Вариант 1

1. Найдите значение *d*, при котором прямая

пересекает ось *Oz*.

2. Найдите условия, которым должны удовлетворять коэффициенты в уравнениях прямой

для того, чтобы прямая: а) была параллельна оси *Ox*; б) лежала в плоскости *Oxz*; в) пересекала ось *Oy*.

3. Найдите координаты точек пересечения прямой

с координатными плоскостями.

4. Запишите параметрические уравнения прямой

Вариант 2

1. Найдите значения *b* и *d*, при которых прямая

пересекает плоскость *Oxy*.

2. Найдите условия, которым должны удовлетворять коэффициенты в уравнениях прямой

для того, чтобы прямая: а) совпадала с осью *Oz*; б) была параллельна плоскости *Oyz*; в) проходила через начало координат.

3. Найдите координаты точек пересечения прямой

с координатными плоскостями.

4. Запишите параметрические уравнения прямой

**56. Аналитическое задание пространственных фигур**

Вариант 1

1. Выясните, какую геометрическую фигуру задает уравнение: а) *x*2 + *y*2 +*z*2 = 1; б) *x*2 = 1; в) *xyz* = 0.

2. Выясните, какую геометрическую фигуру задает система:

а) б)

3. Даны точки *A*(2, 5, 12), *B*(1, 0, 0), *C*(-1, -5, 4) и плоскости и , заданные соответственно уравнениями 2*x* – *y* + *z* +1 = 0 и *x* – 5*y* –13*z* +1 = 0. Для каждой из этих плоскостей найдите среди данных точек те, которые лежат по ту же сторону от плоскости, что и начало координат.

4. Дана плоскость 3*x* – *y* +4*z* +1 = 0. Лежат ли по одну и ту же сторону от нее точки: а) *O*(0, 0, 0) и *D*(2, 1, 0); б) *E*(1, 2, 1) и *F*(5, 15, -1)?

Вариант 2

1. Выясните, какую геометрическую фигуру задает уравнение: а) *x*2 + *y*2 +(z+1)2 = 1; б) *x*2 – *y*2 = 0; в) *x*2 = 0.

2. Выясните, какую геометрическую фигуру задает система:

а) б)

3. Даны точки *E*(-14, 22, 0), *F*(1, -5, 12), *G*(0, 0, 5) и плоскости и , заданные соответственно уравнениями *x* – 2*z* +12 = 0 и *x* + 5*y* + *z* +25 = 0. Для каждой из этих плоскостей найдите среди данных точек те, которые лежат по ту же сторону от плоскости, что и начало координат.

4. Дана плоскость 3*x* – *y* +4*z* +1 = 0. Лежат ли по одну и ту же сторону от нее точки: а) *A*(-1, 2, -5) и *B*(-15, 1, 0); б) *K*(1, , 5) и *L*(1, 15, -15)?

**57\*. Многогранники в задачах оптимизации**

Вариант 1

1. Вершины тетраэдра имеют следующие координаты: *O*(0, 0, 0), *A*(1, 1, 0), *B*(0, 2, 0), *C*(1, 5, 7). Запишите неравенства, характеризующие внутреннюю область данного тетраэдра.

2. Найдите область, определяемую следующей системой неравенств:

а) б)

Изобразите ее.

3. Запишите систему неравенств, определяющую внутреннюю область прямой треугольной призмы *OABO*1*A*1*B*1, если *O*(0, 0, 0), *A*(0, 2, 0), *B*(0, 0, 2), *O*1(5, 0, 0). Изобразите ее и найдите ее объем.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения линейной функции *u = x + y –* 2*z +* 1 на треугольной призме из предыдущей задачи.

Вариант 2

1. Даны вершины тетраэдра *A*(-1, 1, 0), *B*(-2, 2, 0), *C*(-2, 0, 0), *D*(-1, 5, 7). Какие из точек *M*(2, 3, -1), *N*(-, , ), *P*(0, 0, 1), *H*(-, , ) принадлежат внутренней области данного тетраэдра?

2. Найдите область, определяемую следующей системой неравенств: а) б)

3. Запишите систему неравенств, определяющих внутреннюю область тетраэдра *OABC*, если *O*(0, 0, 0), *A*(5, 0, 0), *B*(0, 3, 0), *C*(0, 0, 6). Изобразите ее и найдите ее объем.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения линейной функции *u* = *x – y + z –*1 на тетраэдре из предыдущей задачи.

**58\*. Полярные координаты на плоскости**

Вариант 1

1. Изобразите в полярной системе координат точки *A*(2, ), *B*(1,), *C*(, ), *D*(3,), *E*(4,), *F*(, ).

2. Запишите декартовы координаты точек *G*(2, ), *H*(, ), *P*(5, ), *Q*(3, -).

3. Найдите полярные координаты вершин и точки пересечения диагоналей единичного квадрата, приняв за начало координат одну из его вершин, а за полярную ось – сторону, которая проходит через выбранную вершину.

4. Найдите полярные координаты точек, симметричных точкам *M*(1, ), *N*(3, ), *P*(, -), *Q*(, ) относительно: а) полярной оси; б) начала координат.

Вариант 2

1. Изобразите в полярной системе координат точки *A*(3,), *B*(5,), *C*(, ), *D*(6, ), *E*(2,), *F*(, ).

2. Запишите полярные координаты точек *K*(0, 6), *L*(-2, 0), *M*(-1, 1), *N*(, 1).

3. Найдите полярные координаты вершин правильного шестиугольника, сторона которого равна 1, приняв за начало координат одну из его вершин, а за полярную ось – сторону, которая проходит через выбранную вершину.

4. Найдите полярные координаты точек, симметричных точкам *G*(2, ), *H*(3, ), *R*(3,-), *S*(, ) относительно: а) начала координат; б) полярной оси.

**59\*. Сферические координаты в пространстве**

Вариант 1

1. Найдите декартовы координаты следующих точек пространства, за­данных сферическими координатами: (1, 45о, 60о), (2, 30о, 90о), (1, 90о, 20о).

2. Найдите сферические координаты следующих точек пространства, заданных декартовыми координатами: *A*(1, 1, ), *B*(1, 0, 1), *C*(0, 0, 1).

3. Найдите геометрическое место точек пространства, сферические координаты которых удовлетворяют условиям: а) = 45о; б) = 60о.

4. Какая фигура в пространстве задается неравенствами: а) *r*  2; б) *r*  1, 0?

Вариант 2

1. Найдите декартовы координаты следующих точек пространства, за­данных сферическими координатами: (1, -45о, 60о), (2, 30о, -90о), (3, -90о, 50о).

2. Найдите сферические координаты следующих точек пространства, заданных декартовыми координатами: *A*(2, 2), *B*(-1, 0, 1), *C*(0, 0, -1).

3. Найдите геометрическое место точек пространства, сферические координаты которых удовлетворяют условиям: а) = 30о; б) = 90о.

4. Какая фигура в пространстве задается неравенствами: а) *r*  1; б) *r*  1, - 0?

**60\*. Использование компьютерной программы «GeoGebra» для изображения пространственных фигур**

Вариант 1

1. Получите изображение тетраэдра.

2. Произведите операцию усечения тетраэдра и получите октаэдр.

3. Как из октаэдра получить звезду Кеплера?

4. Получите изображение поверхности *z = xy*.

Вариант 2

1. Получите изображение куба.

2. Произведите операцию усечения куба и получите кубооктаэдр.

3. Как из куба получить ромбододекаэдр?

4. Получите изображение поверхности *z =* cos *x*cos *y*.

**§ 3. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ**

**10 класс**

# **Контрольная работа № 1**

## Вариант 1

1. Три вершины *ABC* параллелограмма *ABCD* принадлежат одной плоскости . Будет ли четвертая вершина *D* принадлежать этой плоскости? Ответ поясните.

2. Четырехугольник *ABCD* лежит в плоскости , а плоскость четырехугольника *BCEF* не совпадает с плоскостью . По какой прямой пересекаются плоскости: а) *ACD* и *BCE*; б) *CEF* и *AEF*?

3. Дана прямая и не принадлежащая ей точка. Докажите, что все прямые, проходящие через эту точку и пересекающие данную прямую, лежат в одной плоскости.

4. Найдите наибольшее число плоскостей, которые можно провести через различные тройки из четырех точек.

5\*. Найдите наибольшее число прямых, которые можно провести через различные пары из пяти точек.

## Вариант 2

1. Две вершины *A* и *B* квадрата *ABCD* и точка *O* – точка пересечения его диагоналей, принадлежат плоскости . Совпадает ли плоскость квадрата с плоскостью . Ответ поясните.

2. Плоскости четырехугольников *ABCD* и *BCEF* не совпадают. Найдите прямую по которой пересекаются плоскости: а) *BDC* и *BEC*; б) *AFD* и *ABF*.

3. Даны две пересекающиеся прямые. Докажите, что все прямые, пересекающие эти прямые и не проходящие через точку их пересечения, лежат в одной плоскости.

4. Найдите наибольшее число прямых, которые можно провести через различные пары из четырех точек.

5\*. Найдите наибольшее число плоскостей, которые можно провести через различные тройки из пяти точек.

# **Контрольная работа № 2**

## Вариант 1

1. В плоскости двух параллельных прямых *a* и *b* дана точка *C*, не принадлежащая этим прямым. Через нее проведена прямая *c*. Найдите все возможные расположения прямой *c* относительно прямых *a* и *b*.

2. Сторона *KM* треугольника *KLM* параллельна плоскости . Точки *G* и *H* принадлежат соответственно его сторонам *KL* и *KM*. Точка *P* – точка пересечения прямой *GH* с плоскостью . Постройте точки пересечения прямых *KL* и *LM* с плоскостью . Найдите линию пересечения плоскостей треугольника *KLM* и .

3. Прямая *b* параллельна плоскости . Определите положение данной прямой относительно прямых: а) лежащих в плоскости ; б) параллельных ; в) пересекающих .

4. Из точки *S*, не принадлежащей ни одной из двух параллельных плоскостей, проведены три прямые, пересекающие эти плоскости соответственно в точках *A*1, *A*2; *B*1, *B*2; *C*1, *C*2. Найдите *SA*2, *SB*2 и *A*1*C*1, если *SA*1 = *A*1*B*1 = 5 см; *A*2*C*2 = *B*1*B*2 = 12 см; *A*2*B*2 = 15 см.

5\*. Найдите наибольшее число плоскостей, которые можно провести через различные пары из: а) пяти лучей; б) шести лучей, выходящих из одной точки.

## Вариант 2

1. В плоскости двух пересекающихся прямых *m* и *n* дана точка *A*, не принадлежащая этим прямым. Прямая *a* проходит через точку *A*. Найдите все возможные расположения прямой *a* по отношению к прямым *m* и *n*.

2. Сторона *CD* четырехугольника *CDEF* параллельна плоскости . Прямая *CE* пересекает плоскость в точке *G*. Постройте точки пересечения прямых *CF* и *DE* с плоскостью . Найдите линию пересечения плоскостей четырехугольника *CDEF* и .

3. Даны две скрещивающиеся прямые *a* и *b*. Определите положение прямой *a* относительно третьей прямой *c*, если: а) *c* параллельна *b*; б) *c* пересекает *b*; в) *c* скрещивается с *b*.

4. Из точки *O*, не принадлежащей ни одной из двух параллельных плоскостей, проведены три прямые, пересекающие плоскости соответственно в точках *A, B, C* и *A*1, *B*1, *C*1. Найдите *BC*, если *OA = a, AA*1 = *b*, *B*1*C*1 = *c*.

5\*. Найдите наибольшее число прямых, по которым могут попарно пересекаться: а) 5 плоскостей; б) 6 плоскостей.

# **Контрольная работа № 3**

## Вариант 1

1. В параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 найдите вектор, равный: а) ; б) ; в) .

2. Изобразите параллельную проекцию куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1, если: а) две грани куба параллельны плоскости проектирования; б) диагональ куба параллельна направлению проектирования.

3. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через одно из его ребер и центр одной из противолежащих граней. Найдите периметр сечения, если ребро куба равно *a*.

4\*. Треугольник *A’B’C’* является параллельной проекцией равнобедренного треугольника *ABC*, боковая сторона которого в два раза больше основания. Постройте изображение в этой проекции высоты треугольника *ABC*, проведенной из вершины основания.

## Вариант 2

1. В параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 найдите вектор, равный: а) ; б) ; в) .

2. Изобразите параллельную проекцию куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1, если: а) какое-нибудь ребро куба параллельно направлению проектирования; б) грани куба не параллельны плоскости проектирования.

3. В правильной 4-угольной призме *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1проведите сечение через середины ребер *AB*, *AD* и вершину *C*1. Найдите периметр сечения, если все ребра призмы равны 1.

4\*. Треугольник *A’B’C’* является параллельной проекцией равнобедренного треугольника *ABC*, боковая сторона которого в два раза больше основания. Постройте изображение в этой проекции биссектрисы треугольника *ABC*, проведенной из вершины основания.

# **Контрольная работа № 4**

## Вариант 1

1. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 вершина *D* соединена с серединой *K* диагонали *A*1*B* грани *ABB*1*A*1. Найдите угол между прямыми *DK* и *A*1*B*.

2. Из вершины *B* квадрата *ABCD* к его плоскости проведен перпендикуляр *BM*. Определите (относительно углов) виды треугольников *ABM, BCM, ADM* и *CDM*.

3. Из вершины *K* треугольника *KLM* проведен к его плоскости перпендикуляр *KN*. Из точки *N* опущен перпендикуляр на сторону *ML*. Найдите условие, при котором этот перпендикуляр пересечет продолжение стороны *ML*.

4. Из точки *E*, не принадлежащей плоскости , проведены к ней две наклонные *EF* и *EG*, образующие равные углы с прямой *FG*, лежащей в плоскости . Докажите, что ортогональные проекции этих наклонных на плоскость равны.

5\*. Докажите, что ортогональная проекция на данную плоскость угла *AOB*, образованного двумя равными наклонными *OA* и *OB* к этой плоскости, больше угла между самими наклонными.

## Вариант 2

1. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 вершина *C*1 соединена с центром *O* грани *ABCD*. Найдите угол между прямыми *C*1*O* и *BD*.

2. Из вершины *C* правильного шестиугольника *ABCDEF* к его плоскости проведен перпендикуляр *CK*. Определите (относительно углов) виды треугольников *BCK, CDK, DEK, EFK*.

3. Из вершины *G* треугольника *GHP* проведен перпендикуляр *GQ*. Из точки *Q* опущен перпендикуляр на сторону *HP*. Найдите условие, при котором этот перпендикуляр пройдет через одну из вершин *H* или *P* треугольника.

4. Из вершины угла к его плоскости проведена наклонная, которая составляет со сторонами угла равные углы. Докажите, что ортогональной проекцией этой наклонной является биссектриса данного угла.

5\*. Докажите, что ортогональная проекция угла на плоскость, проходящую через одну из его сторон, меньше, равна или больше данного угла, смотря по тому, является ли данный угол соответственно острым, прямым или тупым.

# **Контрольная работа № 5**

## Вариант 1

1. В равнобедренном прямоугольном треугольнике один из катетов лежит в плоскости , а другой образует с ней угол 45о. Найдите угол между гипотенузой данного треугольника и данной плоскостью.

2. Точка *K*, не принадлежащая плоскости равностороннего треугольника, удалена от каждой его вершины на расстояние см, а от каждой его стороны – на 2 см. Найдите расстояние от точки *K* до плоскости треугольника.

3. Угол между плоскостями двух равнобедренных треугольников *ABC* и *BCD*, имеющих общую боковую сторону *BC*, равен 900. Найдите расстояние между точками *A* и *D*, если основание каждого треугольника равно *a*, а каждая боковая сторона равна *b*.

4. Внутри двугранного угла из точки *M*, принадлежащей его ребру, проведен к нему перпендикуляр, на котором отложен отрезок *MN*, в два раза больший своей ортогональной проекции на одну из граней двугранного угла. Найдите угол, который образует *MN* с другой гранью, если двугранный угол равен 100о.

5\*. Через данную точку проведите прямую, параллельную данной плоскости и перпендикулярную данной прямой.

## Вариант 2

1. Наклонная *AB* образует с плоскостью угол 45о, прямая *AC*, лежащая в этой плоскости, составляет угол 45о с ортогональной проекцией наклонной *AB* на плоскость . Найдите угол *BAC*.

2. Дан ромб со стороной *a* и углом 450. Точка *L* удалена от всех прямых, на которых лежат стороны ромба, на расстояние *b*. Найдите расстояние от точки *L* до плоскости ромба.

3. Угол между плоскостями двух равнобедренных треугольников *ABC* и *BCD*, имеющих общую боковую сторону *BC*, равен 120о. Расстояние между точками *A* и *D* равно *m*. Основание каждого треугольника равно *a*. Найдите боковые стороны треугольников.

4. Из точки *K*, расположенной внутри двугранного угла, проведен перпендикуляр *KL* на его ребро. Расстояние от точки *K* до одной из его граней равно ортогональной проекции *KL* на эту грань. Этот же отрезок *KL* в два раза больше своей ортогональной проекции на другую грань. Найдите двугранный угол.

5\*. Через данную точку проведите плоскость, перпендикулярную двум данным плоскостям.

# **Контрольная работа № 6**

## Вариант 1

1. Можно ли составить трехгранный угол с плоскими углами: а) 40о, 70о, 100о; б) 150о, 120о, 90о?

2. Два плоских угла трехгранного угла равны по 60о, а третий равен 900. Найдите угол между плоскостью прямого угла и противоположным ребром трехгранного угла.

3. Основанием наклонного параллелепипеда является ромб, а одно боковое ребро образует с прилежащими сторонами основания параллелепипеда равные углы. Докажите, что вершина параллелепипеда, принадлежащая этому ребру, ортогонально проектируется в точку диагонали основания.

4. Найдите расстояние между центрами двух соседних граней правильного октаэдра, если его ребро равно 1.

5\*. Докажите, что любое сечение трехгранного угла с плоскими углами по 90о, пересекающее все его ребра, является остроугольным треугольником.

## Вариант 2

1. Можно ли составить трехгранный угол с плоскими углами: а) 80о, 100о, 130о; б) 60о, 120о, 180о?

2. Плоские углы трехгранного угла равны 45о, 45о и 60о. Найдите двугранный угол, образованный плоскостями равных плоских углов.

3. Основанием пирамиды является прямоугольник, а одно из ее боковых ребер перпендикулярно плоскости основания. Докажите, что все боковые грани пирамиды – прямоугольные треугольники.

4. Найдите расстояние между противоположными параллельными гранями октаэдра, если его ребро равно 1.

5\*. Докажите, что двугранный угол между смежными боковыми гранями любой правильной 4-угольной пирамиды является тупым.

**11 класс**

# **Контрольная работа № 1**

## Вариант 1

1. Шар диаметра 20 см пересечен плоскостью, отстоящей от его центра на 6 см. Найдите площадь полученного сечения.

2. Через конец радиуса шара проведена плоскость под углом 300 к нему. Найдите радиус полученного сечения, если радиус шара равен 1.

3. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной призмы, все ребра которой равны *a*.

4. В прямую призму, основанием которой является ромб с диагоналями 6 см и 8 см, вписана сфера. Определите боковое ребро призмы и радиус вписанной в нее сферы.

5\*. В сферу вписана четырехугольная пирамида, у которой все ребра равны. Докажите, что центр основания пирамиды является центром сферы.

## Вариант 2

1. Шар пересечен плоскостью, отстоящей от его центра на 8 см. Площадь полученного сечения равна 125 см2. Найдите радиус шара.

2. Диаметр шара равен *D*. Через его конец под углом 450 к нему проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения.

3. Около прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны 1 дм, 2 дм и 2 дм, описана сфера. Найдите ее радиус.

4. В правильную треугольную призму, площадь основания призмы равна 27 см2, вписана сфера. Найдите высоту призмы и радиус сферы.

5\*. Боковые ребра правильной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45о. Где расположен центр описанной сферы относительно пирамиды?

# **Контрольная работа № 2**

## Вариант 1

1. Нарисуйте фигуру, которая получается вращением равнобедренного треугольника вокруг его боковой стороны. Как можно получить эту фигуру из конусов?

2. В сферу вписан конус, высота которого равна 3 см, радиус основания равен 3 см. Найдите радиус сферы.

3. Найдите радиус основания и образующую цилиндра, описанного около сферы радиуса *R*.

4. Сколько: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед, у которого нет квадратных граней? Назовите их.

5\*. Внутри двугранного угла, равного 30о, взята точка, удаленная от его граней на 2 см и 3 см. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла.

Вариант 2

1. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении равнобедренного треугольника вокруг прямой, перпендикулярной его боковой стороне и проходящей через вершину, лежащую против основания. Как можно получить эту фигуру из конусов?

2. В сферу вписан усеченный конус, радиусы оснований которого равны 15 см и 24 см, высота равна 27 см. Найдите радиус сферы.

3. Образующая конуса равна 20 см, радиус основания равен 16 см. Найдите радиус вписанной в конус сферы.

4. В основании прямой призмы лежит ромб. Сколько она имеет: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии? Назовите их.

5\*. Прямая, проведенная через вершину прямого угла, образует с его сторонами углы 60о и 45о. Найдите угол между этой прямой и плоскостью прямого угла.

# **Контрольная работа № 3**

## Вариант 1

1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 6 см. Найдите объем цилиндра.

2. Основанием прямого параллелепипеда является ромб, площадь которого равна 8 дм2. Площади диагональных сечений равны 24 дм2 и 48 дм2. Найдите объем параллелепипеда.

3. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами *a* и *a*. Найдите объем пирамиды, если каждое ее боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 30о.

4. Высота конуса равна 12 см, периметр осевого сечения 36 см. Найдите объем конуса.

5\*. Найдите объем тела, которое образуется при вращении правильного шестиугольника со стороной *a* вокруг апофемы (высота, опущенная из центра правильного многоугольника на его сторону).

## Вариант 2

1. В цилиндре через середину радиуса основания перпендикулярно ему проведено сечение. В сечении получился квадрат площадью 16 см2. Найдите объем цилиндра.

2. Основанием прямой четырехугольной призмы является ромб, диагонали которого относятся как 5:2. Диагонали призмы равны 17 дм и 10 дм. Найдите объем призмы.

3. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник, основание которого равно 12 см, а боковая сторона – 10 см. Найдите объем пирамиды, если каждая ее боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 45о.

4. Площадь осевого сечения равностороннего конуса равна *Q*. Найдите объем конуса.

5\*. Найдите объем тела, которое образуется при вращении правильного шестиугольника со стороной *a* вокруг его малой диагонали.

# **Контрольная работа № 4**

## Вариант 1

1. Найдите отношение площадей поверхностей двух шаров, если диаметр одного из них в два раза больше диаметра другого.

2. Боковые грани пирамиды, в основании которой лежит ромб, наклонены к плоскости основания под углом . Найдите площадь поверхности пирамиды, если сторона ромба равна *a*, а его острый угол равен .

3. Площадь боковой поверхности цилиндра равна половине площади его полной поверхности. Найдите площадь поверхности цилиндра, если диагональ его осевого сечения равна 5 см.

4. Через вершину конуса проведено сечение, пересекающее основание по хорде, равной 4 дм и отсекающей дугу 90о. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если угол при вершине осевого сечения равен 60о.

5\*. Образующая усеченного конуса равна 4 см и наклонена к плоскости основания под углом 60о. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, если радиус его большего основания равен 5 см.

## Вариант 2

1. Объем одного шара равен 2 см3, другого – 3 см3. Найдите отношение площадей их поверхностей.

2. В основании пирамиды лежит квадрат, две ее боковые грани перпендикулярны основанию, а две другие составляют с ним равные углы . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если ее высота равна *h*.

3. Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник, одна сторона которого в два раза больше другой. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 20 дм2. Найдите площадь его поверхности.

4. Через две образующие конуса проведена плоскость, отсекающая от основания дугу в 120о и образующая с плоскостью основания угол 45о. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания равен 4 см.

5\*. Радиусы оснований усеченного конуса равны 2 см и 7 см, диагональ осевого сечения равна 15 см. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса.

# **Контрольная работа № 5**

## Вариант 1

1. Найдите расстояние от точки *A*(1, -2, 3) до: а) координатной плоскости *Oyz*; б) начала координат; в) координатной прямой *Ox*.

2. Даны точки *B*(3, 0, -2) и *C*(-2, 6, -4). Найдите координаты вектора: а) ; б) ; в) .

3. Даны векторы (3, 0, -1) и (-5, , 0). Найдите число *k*, при котором векторы +*k* и 2 перпендикулярны.

4. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку *M*(5, -4, 1) и параллельна плоскости 2*x* – *y* – *z* + 3 = 0.

5\*. Точка движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора (-1, 3, 2). В момент времени *t =* 0 она имела координаты (4, 0, -5). Найдите ее координаты в момент времени *t =* 3.

## Вариант 2

1. Найдите расстояние от точки *B*(-2, 3, 4) до: а) начала координат; б) координатной плоскости *Oxz*; в) координатной прямой *Oy*.

2. Даны точки *C*(5, 0, -2) и *D*(-1, 2, -3). Найдите координаты вектора: а) ; б) ; в) .

3. Найдите угол, под которым виден отрезок *EF* из начала координат, если *E*(5, , -2) и *F*(-2, 0, 1).

4. Напишите уравнение плоскости, перпендикулярной прямой *KL* и проходящей через точку *L*(-3, 2, -1), если *K*(7, -11, 3).

5\*. Точка движется прямолинейно и равномерно. В момент времени *t =* 1 она имела координаты (2, -3, 4), а в момент времени *t* = 3координаты (-1, 4, -2). С какой скоростью движется точка?

**10 класс**

**Углублённый уровень**

***Контрольная работа № 1***

Вариант 1

1. Дана прямая *a* и точка *A*. Сколько плоскостей можно провести через данную прямую и данную точку? Ответ объясните.

2. Докажите, что если плоскость и прямая, не лежащая на ней, имеют общую точку, то эта точка единственная.

3. Даны две пересекающиеся прямые *a* и *b*. Как может располагаться прямая *a* относительно третьей прямой *c*, если: а) *c* параллельна *b*; б) *c* пересекается с *b*; в) *c* скрещивается c *b*.

4. Найдите число диагоналей: а) пятиугольника; б) пятиугольной призмы.

5\*. Ребро куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 равно 1. Определите расстояние от центра грани *ABCD* до точки пересечения прямой *C*1*M*, где *M* – середина ребра *AA*1, и плоскости грани *ABCD*.

Вариант 2

1. Даны три точки *A*, *B*, *C*. Сколько плоскостей можно провести через данные точки? Ответ объясните.

2. Докажите, что если в двух пересекающихся плоскостях лежат две пересекающиеся прямые (по одной в каждой плоскости), то точка пересечения прямых принадлежит прямой пересечения этих плоскостей.

3. Даны две параллельные прямые *a* и *b*. Как может располагаться прямая *b* относительно третьей прямой *c*, если: а) *c* параллельна *a*; б) *c* пересекается с *a*; в) *c* скрещивается c *a*.

4. Найдите число диагоналей: а) шестиугольника; б) шестиугольной призмы.

5\*. Ребро куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 равно *a*. Найдите длину отрезка *OK*, где *O* – центр грани *ABCD*, *K* – точка пересечения прямой *A*1*L*, где *L* – середина ребра *C*1*C*, и плоскости грани *ABCD*.

***Контрольная работа № 2***

Вариант 1

1. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Плоскостям каких граней куба параллельна плоскость, в которой лежит его грань *CDD*1*C*1?

2. Даны две параллельные прямые, не лежащие в данной плоскости. Докажите, что если одна из них параллельна данной плоскости, то и другая прямая параллельна этой плоскости.

3. Параллелограмм *ABCD* является изображением в параллельной проекции ромба, тупой угол которого равен 1200. Постройте на изображении ромба изображение его высот, проведенных из данного угла.

4. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания пирамиды параллельно ее боковому ребру.

5\*. Два треугольника *ABC* и *ADE* имеют общую вершину *A*, а их стороны *BC* и *DE* лежат в одной плоскости. Постройте прямую пересечения плоскостей *ABC* и *ADE*, если *BC* и *DE* не параллельны.

Вариант 2

1. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Плоскостям каких граней куба параллельна прямая, содержащая ребро *BB*1? Почему?

2. Докажите, что если прямая параллельна одной из двух параллельных плоскостей, то она параллельна и другой плоскости.

3. На изображении в параллельной проекции прямоугольного треугольника с острым углом 300 постройте изображение биссектрисы этого угла.

4. Постройте сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через центр основания пирамиды параллельно ее боковой грани.

5\*. Два треугольника *ABC* и *ADE* имеют общую вершину *A*, а их стороны *BC* и *DE* лежат в одной плоскости. Постройте прямую пересечения плоскостей *ABC* и *ADE*, если *BC* и *DE* параллельны.

***Контрольная № 3***

Вариант 1

1. Из точки *O* – точки пересечения диагоналей прямоугольника *ABCD*, к его плоскости проведен перпендикуляр. Докажите, что любая точка этого перпендикуляра равноудалена от вершин *A*, *B*, *C*, *D*.

2. Вершина *B*1 куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 соединена с точкой *O* – центром грани *ABCD*. Найдите угол между прямыми *AC* и *B*1*O*.

3. Из точки вне плоскости проведены к ней две наклонные, по 6 см каждая. Найдите расстояние между их концами, если каждая наклонная образует с плоскостью угол в 30о и угол между их проекциями на эту плоскость равен 120о.

4. Плоскости правильного треугольника *ABC* и треугольника *ACD* образуют между собой угол в 30о, причем вершина *D* проектируется в центр правильного треугольника, высота которого равна 3 см. Определите длину *BD*.

5\*. Из точки *M*, лежащей внутри двугранного угла, опущен перпендикуляр *MH* на его ребро. Расстояние от точки *M* до одной из граней данного двугранного угла равно проекции *MH* на эту грань. Отрезок *MH* в два раза больше, чем его проекция на вторую грань. Найдите двугранный угол.

Вариант 2

1. Точка *O* – точка пересечения диагоналей параллелограмма *ABCD*. Точка *M* не принадлежит плоскости параллелограмма. Докажите, что *MO* – перпендикуляр к плоскости параллелограмма, если *MA* = *MC* и *MB* = *MD*.

2. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Найдите угол между прямыми *AE* и *D*1*C*, где *E* – середина *DC*1.

3. Из точки вне плоскости проведены к ней две наклонные, каждая из которых образует с плоскостью угол в 45о. Найдите расстояние от данной точки до данной плоскости, если угол между наклонными равен 60о и расстояние между концами наклонных равно 10 см.

4. Найдите расстояние от вершины прямого угла *C* треугольника *ABC* до плоскости, проходящей через сторону *AB* под углом 300 к плоскости треугольника, если *AC* = 20 см и *BC* = 15 см.

5\*. В одной грани двугранного угла проведена прямая под углом 30о к другой грани и под углом 45о к ребру. Найдите двугранный угол.

***Контрольная работа № 4***

Вариант 1

1. В прямом круговом конусе с радиусом основания 5 см и высотой 12 см на расстоянии 3 см от вершины проведено сечение, параллельное основанию. Найдите диаметр круга, получившегося в сечении.

2. В выпуклом многограннике число вершин равно В, причем в каждой вершине сходится одно и то же число ребер, равное *m*. Найдите число плоских углов, ребер и граней данного многогранника.

3. Как изменится число вершин, ребер и граней выпуклого многогранника, если к одной из его граней пристроить пирамиду?

4. Найдите ребро октаэдра, вписанного в куб, если ребро куба равно 1.

5\*. Докажите, что не существует выпуклого многогранника с семью ребрами.

Вариант 2

1. В правильной треугольной пирамиде со стороной основания, равной 6 см, и высотой 18 см на расстоянии 9 см от вершины проведено сечение, параллельное основанию. Найдите сторону треугольника, получившегося в сечении.

2. В выпуклом многограннике известно число граней Г, причем каждая грань имеет одно и то же число сторон n. Найдите число плоских углов, ребер и вершин данного многогранника.

3. Как изменится число вершин, ребер и граней выпуклого многогранника, если от него отсечь один из его углов?

4. Найдите ребро правильного тетраэдра, вписанного в правильный тетраэдр, если ребро описанного тетраэдра равно 1.

5\*. Существует ли выпуклый многогранник, у которого 13 граней и в каждой грани по 13 сторон?

***Контрольная работа № 5***

Вариант 1

1. Шар диаметром 20 см пересечен плоскостью, отстоящей от его центра на 6 см. Найдите площадь полученного сечения.

2. Через конец радиуса шара проведена плоскость под углом 300 к нему. Найдите радиус полученного сечения, если радиус шара равен 1.

3. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной призмы, все ребра которой равны *a*.

4. В прямую призму, основанием которой является ромб с диагоналями 6 см и 8 см, вписана сфера. Найдите боковое ребро призмы и радиус вписанной в нее сферы.

5\*. В сферу вписана четырехугольная пирамида, у которой все ребра равны. Докажите, что центр основания пирамиды является центром сферы.

Вариант 2

1. Шар пересечен плоскостью, отстоящей от его центра на 8 см. Площадь полученного сечения равна 125 см2. Найдите радиус шара.

2. Диаметр шара равен *D*. Через его конец под углом 45о к нему проведена плоскость. Найдите площадь полученного сечения.

3. Около прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны 1 дм, 2 дм и 2 дм, описана сфера. Найдите ее радиус.

4. В правильную треугольную призму вписана сфера. Площадь основания призмы равна 27 см2. Найдите высоту призмы и радиус вписанной в нее сферы.

5\*. Боковые ребра правильной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45о. Где расположен центр описанной сферы относительно пирамиды?

***Контрольная работа № 6***

Вариант 1

1. Нарисуйте фигуру, которая получается вращением равнобедренного треугольника вокруг его боковой стороны. Как можно получить эту фигуру из конусов?

2. В сферу вписан конус, высота которого равна 3 см, радиус основания равен 3 см. Найдите радиус сферы.

3. Найдите радиус основания и образующую цилиндра, описанного около сферы радиуса *R*.

4. Сколько: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед, у которого нет квадратных граней? Назовите их.

5\*. Внутри двугранного угла, равного 30о, взята точка, удаленная от его граней на 2 см и 3 см. Найдите расстояние от этой точки до ребра двугранного угла.

Вариант 2

1. Нарисуйте фигуру, которая получается при вращении равнобедренного треугольника вокруг прямой, перпендикулярной его боковой стороне и проходящей через вершину, лежащую против основания. Как можно получить эту фигуру из конусов?

2. В сферу вписан усеченный конус, радиусы оснований которого равны 15 см и 24 см, высота равна 27 см. Найдите радиус сферы.

3. Образующая конуса равна 20 см, радиус основания равен 16 см. Найдите радиус вписанной в конус сферы.

4. В основании прямой призмы лежит ромб. Сколько она имеет: а) осей симметрии; б) плоскостей симметрии? Назовите их.

5\*. Прямая, проведенная через вершину прямого угла, образует с его сторонами углы 60о и 45о. Найдите угол между этой прямой и плоскостью прямого угла.

**11 класс**

**Углублённый уровень**

***Контрольная № 1***

Вариант 1

1. Докажите, что уравнение: а) 8*x*2+3*y*2=48; б) 25*x*2+4*y*2=16 задает на плоскости эллипс. Найдите его большую и малую полуосей.

2. Определите, какая фигура получится при вращении: а) правильной пятиугольной пирамиды вокруг ее высоты; б) прямой призмы, в основании которой лежит трапеция, вокруг ее бокового ребра.

3. Найдите объем цилиндра, высота которого равна 5 см, если известно, что при увеличении высоты цилиндра на 4 см, его объем увеличивается на 36 см3.

4. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, диагонали которого относятся как 5:2. Диагонали параллелепипеда равны 17 см и 10 см. Найдите объем параллелепипеда.

5\*. Около октаэдра описан цилиндр. Две вершины октаэдра лежат в центрах оснований цилиндра, а остальные четыре – на боковой поверхности цилиндра. Найдите объем цилиндра, если ребро октаэдра равно *a*.

Вариант 2

1. Для параболы, заданной уравнением *y* = *x*2 найдите: а) координаты фокуса; б) уравнение директрисы.

2. Определите, какая фигура получится при вращении: а) правильной призмы вокруг прямой, соединяющей центры ее оснований; б) пирамиды, в основании которой лежит ромб и вершина проектируется в точку пересечения его диагоналей.

3. В цилиндре через середину радиуса основания перпендикулярно ему проведено сечение. В сечении получился квадрат площадью 16 см2. Найдите объем цилиндра.

4. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, диагонали которого равны 1 дм и 7 дм. Диагонали параллелепипеда относятся как 13:37. Найдите объем параллелепипеда.

5\*. В прямую призму, основанием которой является равнобедренная трапеция, вписан куб таким образом, что его вершины лежат в серединах сторон оснований призмы. Найдите объем призмы, если ребро куба равно *a*.

***Контрольная работа № 2***

Вариант 1

1. Найдите объем наклонной призмы, в основании которой лежит правильный шестиугольник со стороной 4 см. Боковое ребро призмы, равное 5 см, наклонено к плоскости основания под углом 60о.

2. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с катетами *a* и *a*. Найдите объем пирамиды, если каждое ее боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 30о.

3. Высота конуса равна 12 см, периметр осевого сечения – 36 см. Найдите объем конуса.

4. Найдите объем правильной усеченной пирамиды, если радиусы описанных около ее оснований окружностей равны 2 см и 8 см, а боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 30о.

5\*. Основанием наклонного параллелепипеда является прямоугольник со сторонами 4 см и 6 см, боковое ребро равно 2 см и образует со смежными сторонами основания углы по 60о. Найдите объем параллелепипеда.

Вариант 2

1. В основании наклонной призмы лежит равнобедренная трапеция с основаниями 5 см и 9 см и острым углом 45о. Найдите объем призмы, если ее боковое ребро, равное 7 см, наклонено к плоскости основания под углом 30о.

2. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 см, а боковая сторона – 10 см. Найдите объем пирамиды, если каждая ее боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 45о.

3. Площадь осевого сечения равностороннего конуса равна *Q*. Найдите объем конуса.

4. Найдите объем правильной треугольной усеченной пирамиды, если радиусы вписанных в ее основания окружностей равны 1 см и 2 см, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 30о.

5\*. Основанием наклонного параллелепипеда является квадрат со стороной 15 см. Боковое ребро, равное 14 см, образует с прилежащими сторонами основания равные острые углы. Расстояние между соответствующими сторонами двух оснований равно 10 см. Найдите объем параллелепипеда.

***Контрольная работа № 3***

Вариант 1

1. Шар пересечен плоскостью, отстоящей от его центра на расстояние 8 см. Найдите объем шара, если площадь сечения равна 36 см2.

2. Плоскость, параллельная оси цилиндра, делит окружность основания в отношении 1:5. Площадь образовавшегося сечения равна 10 см2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

3. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если площадь его основания равна *Q*, а площадь осевого сечения равна *q*.

4. Прямоугольный треугольник, катеты которого равны 3 см и 4 см, вращается вокруг гипотенузы. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения.

5\*. Радиус шара равен 25 см. Найдите площадь поверхности частей шара, на которые он делится сечением площадью 49 см2.

Вариант 2

1. Сечение шара плоскостью, которая отстоит от его центра на 3 см, имеет радиус, равный 4 см. Найдите объем шара.

2. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отстоит от нее на расстоянии 9 см. Образующая цилиндра равна 10 см. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если площадь образовавшегося сечения равна 240 см2.

3. Расстояние от центра основания равностороннего конуса до его образующей равно *a*. Найдите площадь полной поверхности конуса.

4. Прямоугольный треугольник, катеты которого равны 5 см и 12 см, вращается вокруг оси, параллельной меньшему катету, проходящей через вершину прямого угла и лежащей в плоскости треугольника. Найдите объем и площадь поверхности тела вращения.

5\*. Радиусы оснований шарового пояса равны 10 см и 12 см, высота пояса равна 11 см. Найдите площадь поверхности данного шарового пояса.

***Контрольная работа № 4***

Вариант 1

1. Найдите координаты точки:

а) симметричной точке *A*(-1, 2, -3) относительно начала координат;

б) относительно которой симметричны точки *M*(2, -4, 7) и *N*(-1, 6, -10);

в) симметричной точке *K*(3, -8, 9) относительно координатной плоскости *Oy*z.

2. Найдите координаты точки, принадлежащей оси *Ox* и равноудаленной от точек *A*(-4, 0, 6) и *B*(1, 2, -10).

3. Найдите координаты конца вектора (12, -3, 5), если *M*(1, 2, -8).

4. В параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1, найдите:

а) ; б) .

5\*. Дан треугольник *ABC*, *M* – точка пересечения его медиан, *O* – произвольная точка пространства. Докажите, что выполняется следующее равенство: .

Вариант 2

1. Найдите координаты точки:

а) относительно которой симметричны точки *K*(8, -5, 11) и *L*(-6, 10, 0);

б) симметричной точке *B*(3, -5, -2) относительно точки *N*(6, 0, -3);

в) симметричной точке *M*(-1, 2, -4) относительно координатной плоскости *Ox*z.

2. Найдите координаты точки, принадлежащей оси *O*z и равноудаленной от точек *C*(4, 5, 0) и *D*(-2, 3, 6).

3. Найдите координаты начала вектора (7, -1, 4), если *F*(0, 6, -11).

4. В параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1, найдите:

а) ; б) .

5\*. В пространстве даны два треугольника *ABC* и *A*1*B*1*C*1; *M* и *M*1 – соответствующие точки пересечения их медиан. Докажите, что .

***Контрольная работа № 5***

Вариант 1

1. Найдите скалярное произведение векторов (-3, -1, 2) и (5, -2, 7) и угол между ними.

2. При каком значении *m* векторы 3*m* и перпендикулярны, если (3, 0, -6), (1, -2, 5).

3. Запишите уравнение плоскости, если она:

а) перпендикулярна оси *Oz* и проходит через точку *A*(0, 0, -2);

б) параллельна плоскости *Oxz* и проходит через точку *B*(1, -3, 2).

4. Найдите угол между плоскостями 2*x*+3*y*+6*z*+5=0 и

4*x*+4*y*+2*z*-7=0.

5\*. Точка движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора (-1, 3, -2). В момент времени *t* = 0 она имела координаты (4, 0, -5). Найдите ее координаты в момент времени *t* = 3.

Вариант 2

1. Найдите их скалярное произведение и угол между векторами (2, 4, -4) и (-1, 3, 4).

2. При каком значении *t* векторы 5 и 2 перпендикулярны, если (2, -5, 1), (0, 3, -2).

3.Запишите уравнение плоскости, если она:

а) перпендикулярна оси *Oy* и проходит через точку *C*(0, 4, 0);

б) параллельна плоскости *Oy*z и проходит через точку *D*(2, 1, -3).

4. Найдите угол между плоскостями 2*x*-*y*+2*z*-7=0 и 4*x*-3*y*+5=0.

5\*. Точка движется прямолинейно и равномерно. В момент времени *t* = 1 она имела координаты (2, -3, 4), а в момент времени *t* = 3 – координаты (-1, 4, -2). С какой скоростью движется точка?

***Контрольная работа № 6***

Вариант 1

1. Изобразите в полярной системе координат точки: а) *A*(2, ); б) *B*(3, -); в) *C*(, -).

2. Постройте кривую, заданную уравнением *r* = .

3. Найдите декартовы координаты точек пространства, заданных своими сферическими координатами: а) (1, -45о, 270о); б) (3, 120о, -90о).

4. Найдите сферические координаты точек пространства, заданных своими декартовыми координатами:

а) (0,, -); б) (-1, 0,).

5\*. Изобразите в полярной системе координат кривую *r* = .

Вариант 2

1. Изобразите в полярной системе координат точки: а) *K*(1,); б) *L*(4, -); в) *M*(-1,).

2. Постройте кривую, заданную уравнением *r* = 2.

3. Найдите сферические координаты точек пространства, заданных своими декартовыми координатами:

а) (-, -, -3); б) (-, -, 1).

4. Найдите декартовы координаты точек пространства, заданных своими сферическими координатами: а) (2, 135о, -180о); б) (1, -60о, 150о).

5\*. Изобразите в полярной системе координат кривую *r* = cos 3.

##### **10-11 классы**

##### **Базовый уровень**

###### Контрольная работа № 1

##### Вариант 1

1. Прямые *a* и *b* пересекаются. Докажите, что прямая *c*, пересекающая их в двух различных точках, лежит с ними в одной плоскости.

2. Можно ли провести через точку пересечения диагоналей прямоугольника прямую, которая не пере­секает его сторон?

3. Сторона *AC* треугольника *ABC* лежит в плос­кости α. Вершина *B* не принадлежит этой плоскости. До­кажите, что прямая, проходящая через середины сто­рон *AB* и *BC*, параллельна плоскости α.

4. Через точку *K*, не лежащую между параллель­ными плоскостями α и β, проведены прямые *a* и *b*. Прямая *a* пересекает плоскости α и β в точках *A*1 и *A*2 соответственно, прямая *b* - в точках *B*1 и *B*2. Найдите отрезок *B*1*B*2, если *A*2*B*2:*A*1*B*1 = 9:4, *KB*1 = 8см.

5\*. Докажите, что если плоскость пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость.

##### Вариант 2

1. Даны четыре точки, три из которых принад­лежат одной прямой. Докажите, что все данные точки принадлежат одной плоскости.

2. Можно ли через вершину треугольника про­вести прямую, которая не лежит в его плоскости?

3. Через основание *AD* трапеции *ABCD* проведена плоскость . Основание *BC* не лежит в плоскости . Докажите, что прямая, проходящая через середины сторон *AB* и *CD*, параллельна плоскости .

4. Через точку *M*, лежащую между параллельными плоскостями и , проведены прямые *a* и *b*. Прямая *a* пересекает плоскости и в точках *A*1 и *A*2 со­ответственно, прямая *b* - в точках *B*1 и *B*2. Найдите отрезок *MB*2, если *A*1*B*1:*A*2*B*2 = 3:4, *B*1*B*2 = 14 см.

5\*. Докажите, что если прямая пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость.

###### Контрольная работа № 2

##### Вариант 1

1. На изображении квадрата *ABCD* постройте: а) изображение центра описанной около квадрата окруж­ности; б) изображение прямой, проведенной через вершину *B* параллельно диагонали *AC*.

2. Верно ли утверждение, что прямая, лежащая в одной из двух параллельных плоскостей, парал­лельна другой плоскости?

3. Сторона равностороннего треугольника *ABC* равна 12 см. Точка *K* находится на равном расстоя­нии от его вершин и удалена от плоскости треуголь­ника на 4 см. Найдите: а) длину проекции отрезка *KA* на плоскость треугольника; б) расстояние от точки *K* до вершины треугольника.

4. Из точек *A* и *B*, принадлежащих двум перпендику­лярным плоскостям, проведены в них перпендикуляры *AC* и *BD* к линии пересечения плоскостей. Найдите отрезок *AB*, если *AC* = 12 см, *BD* = 15 см, *CD*=16 см.

5\*. Докажите, что плоскость, перпендикулярная одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и другой плоскости.

### Вариант 2

1. На изображении равностороннего треугольни­ка *ABC* постройте: а) изображение высоты данного треугольника, проведенной к стороне *BC*; б) изобра­жение биссектрисы угла *C* данного треугольника.

2. Прямые *a* и *b* расположены соответственно в плоскостях α и β. Верно ли утверждение, что эти прямые не имеют общих точек?

3. Сторона квадрата *ABCD* равна 8см. Точка *M* удалена от каждой его вершины на 16 см. Найдите: а) проекцию отрезка *MA* на плоскость квадрата; б) расстояние от точки *M* до плоскости квадрата.

4. Из точек *M* и *K*, принадлежащих двум перпендику­лярным плоскостям, проведены в них перпендикуляры *MC* и *KD* к линии пересечения плоскостей. Найдите отрезок *СD*, если *MC*=8 см, *KD*=9 см, *MK*=17 см.

5\*. Докажите, что плоскость, пересекающая одну из параллельных плоскостей под углом , пересекает и другую под тем же углом .

***Контрольная № 3***

##### Вариант 1

1. Вычислите площадь поверхности икосаэдра, ребро которого равно *a*.

2. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 8 см, сторона ее основания - 12 см. Найдите: а) боковое ребра; б) площадь боковой по­верхности пирамиды.

3. Боковое ребро *MA* пирамиды *MABC* перпендику­лярно плоскости ее основания; *AB* = *AC* = *a*; *BAC* = 2. Угол между плоскостью *MBC* и плоскостью основания равен . Найдите расстояние от вершины пирамиды до прямой *BC*.

4\*. Сторона основания правильной шестиуголь­ной призмы равна *a*, наибольшая диагональ призмы наклонена к плоскости основания под углом . Най­дите высоту призмы.

##### Вариант 2

1. Вычислите площадь поверхности октаэдра, ребро которого равно *a*.

2. Высота правильной треугольной пирамиды равна 4см. Радиус окружности, описанной около ее основания, равен 8 см. Найдите: а) боко­вое ребро; б) площадь боковой поверхности пирами­ды.

3. Основанием пирамиды *MABCD* является квад­рат, сторона которого равна *a*. Боковое ребро *MD* перпендикулярно плоскости основания. Угол между плоскостью грани *MAB* и плоскостью основания равен . Найдите расстояние от вершины пирамиды до пря­мой *AC*.

4\*. Сторона основания правильной шестиуголь­ной призмы равна *a*, наименьшая диагональ призмы наклонена к плоскости основания под углом . Най­дите высоту призмы.

###### Контрольная работа № 4

##### Вариант 1

1. Образующая конуса равна 18 см. Угол между образующей и плоскостью основания 60о. Найдите вы­соту и площадь основания конуса.

2. Высота цилиндра равна *h*, радиус его осно­вания *R*. Через хорду основания проведена плос­кость, параллельная оси цилиндра. Угол между ради­усами, проведенными в концы хорды, равен 2. Найдите площадь сечения.

3. Назовите элементы симметрии правильной че­тырехугольной пирамиды.

4\*. Какими свойствами должен обладать усечен­ный конус, чтобы в него можно было вписать шар?

##### Вариант 2

1. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 32 см и наклонена к плоскости его основания под углом 300. Найдите высоту и площадь основания ци­линдра.

2. Через вершину конуса, высота которого рав­на *h*, проведено сечение. Угол между плоскостями сечения и основания равен . Угол при вершине се­чения равен 2. Найдите радиус основания конуса.

3. Назовите элементы симметрии правильной шестиугольной пирамиды.

4\*. Какими свойствами должна обладать пирамида, чтобы в нее можно было вписать сферу?

# **Контрольная работа № 5**

## Вариант 1

1. Основанием прямого параллелепипеда являет­ся ромб, диагонали которого равны 24 см и 10 см. Угол между меньшей диагональю параллелепипеда и плоскостью основания равен 45о. Найдите: а) объем параллелепипеда; б) его большую диагональ.

2. Длина окружности сечения шара плоскостью, удаленной от его центра на 3 см, равна 6π см. Най­дите объем и площадь поверхности шара.

3. Угол между плоскостью сечения прямого кру­гового конуса, проходящей через его вершину, и плоскостью его основания равен φ. Хорда, являющая­ся основанием сечения, равна 2*a* и удалена от цент­ра основания конуса на расстояние, равное *a*. Най­дите: а) объем конуса; б) площадь его боковой по­верхности.

4\*. Равнобедренный треугольник с углом при вершине 2 вращается вокруг прямой, параллельной его основанию и проходящей через его вершину. Вы­сота треугольника, проведенная к его основанию, равна *h*. Найдите: а) объем фигуры вращения; б) площадь ее поверхности.

##### Вариант 2

1. Основание прямой призмы *ABCA*1*B*1*C*1 - равнобед­ренный треугольник, в котором *AB* = *AC* = 17 см, *BC* = 8 см. Угол между плоскостью, содержащей прямую *BC* и вершину *A*1, и плоскостью основания равен 30о. Найдите: а) объем призмы; б) площадь сечения призмы указанной плоскостью.

2. Площадь сечения шара плоскостью равна 36 см2. Радиус шара, проведенный в точку окружности сечения, составляет с его плоскостью угол 45о. Найдите объем и площадь поверхности шара.

3. Диагональ сечения прямого кругового ци­линдра плоскостью, параллельной его оси, равна 2*a* и наклонена к плоскости основания под углом . Расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения равно *a*. Найдите: а) объем цилиндра; б) площадь его полной поверхности.

4\*. Прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см вращается вокруг своей гипотенузы. Найдите: а) объем фигуры вращения; б) площадь ее поверхности.

###### Контрольная работа № 6

##### Вариант 1

1. Запишите разложение по координат­ным векторам векторов: а) (7, 3, -6); б) (0, -1, 4); в) (-1, 0, 4); г) (0, 0, -2).

2. Найдите угол φ между векторами (1, 2, -4) и (0, -1, 3).

3. Найдите точку, расположенную в плоскостях *Oyz* и 7*x*+3*y*-5*z*-3 = 0 и имеющую координату *z* = 3.

4. Составьте уравнение плоскости, проходящей через ось *Ox* и точку *M* (2, 1, 5).

5\*. Под действием силы (1, -2, 2), приложенной под углом 60о к направлению перемещения, тело переместилось на 10. Вычислите выполненную этой силой работу.

##### Вариант 2

1. Даны векторы (2, -1, 4) и (3, 0, -2). Най­дите координаты векторов: а) 5; б) 3; в) 2.

2. Найдите угол φ между векторами (3, 2, -2) и (0, 4, 4).

3. Найдите точку, расположенную в плоскостях 2*x*+5*y*+6*z*+4 = 0 и плоскости *Oxy*, имеющую ординату, равную 2.

4. Составьте уравнение плоскости, проходящей через ось *Oz* и точку *N* (4, -2, 3).

5\*. Три силы (4, -5, 2), (1, 0, -1), (-1, 6, -3) приложены к одной точке. Вычислите, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения *M*1(4, 3, 2), двигаясь пря­молинейно, перемещается в точку *M*2(7, 5, -3).

**§ 4. ТЕСТЫ**

**Тест № 1. «Начала стереометрии»**

1. Сколько прямых можно провести через одну точку пространства?

1) Ни одной.

2) Одну.

3) Две.

4) Бесконечно много.

2. Сколько плоскостей можно провести через одну точку пространства?

1) Ни одной.

2) Одну.

3) Две.

4) Бесконечно много.

3. Сколько прямых можно провести через две точки пространства?

1) Ни одной.

2) Одну.

3) Две.

4) Бесконечно много.

4. Сколько плоскостей можно провести через две точки пространства?

1) Ни одной.

2) Одну.

3) Две.

4) Бесконечно много.

5. Сколько прямых можно провести через различные пары из трех точек пространства, не принадлежащих одной прямой?

1) Ни одной.

2) Три.

3) Шесть.

4) Бесконечно много.

6. Сколько плоскостей можно провести через три точки пространства, не принадлежащие одной прямой?

1) Ни одной.

2) Одну.

3) Три.

4) Бесконечно много.

7. Сколько плоскостей можно провести через три точки пространства, принадлежащие одной прямой?

1) Ни одной.

2) Одну.

3) Три.

4) Бесконечно много.

8. Сколько общих точек имеют две пересекающиеся плоскости?

1) Одну.

2) Две.

3) Три.

4) Бесконечно много.

9. В каком случае центры трех шаров принадлежат одной плоскости?

1) Радиусы шаров совпадают.

2) Центры шаров принадлежат одной прямой.

3) Всегда.

4) Никогда.

10. Сколько плоскостей можно провести через три вершины куба?

1) Одну.

2) Три.

3) Шесть.

4) Бесконечно много.

11. Какое наибольшее число прямых можно провести через различные пары из четырех точек пространства?

1) Четыре.

2) Пять.

3) Шесть.

4) Восемь.

12. Какое наибольшее число прямых можно провести через различные пары из пяти точек пространства?

1) 5.

2) 10.

3) 15.

4) 25.

13. Найдите число диагоналей прямоугольного параллелепипеда.

1) 2.

2) 4.

3) 6.

4) 8.

14. Найдите число диагоналей 6-угольной призмы.

1) 6.

2) 12.

3) 9.

4) 18.

15. Какой многоугольник лежит в основании пирамиды, имеющей 12 ребер?

1) Треугольник.

2) Четырехугольник.

3) Шестиугольник.

4) Двенадцатиугольник.

16. Какой многоугольник лежит в основании призмы, имеющей 36 ребер?

1) Шестиугольник.

2) Девятиугольник.

3) Двенадцатиугольник.

4) Тридцатишестиугольник.

17. Призма имеет 18 вершин. Какой многоугольник лежит в ее основании?

1) Треугольник.

2) Шестиугольник.

3) Девятиугольник.

4) Восемнадцатиугольник.

18. Пирамида имеет 10 вершин. Какой многоугольник лежит в ее основании?

1) Пятиугольник.

2) Шестиугольник.

3) Восьмиугольник.

4) Девятиугольник.

19. Призма имеет 18 диагоналей. Определите ее вид.

1) Треугольная.

2) Шестиугольная.

3) Девятиугольная.

4) Восемнадцатиугольная.

20. Сколько диагоналей имеет 7-угольная пирамида?

1) Ни одной.

2) 6.

3) 7.

4) 14.

**Тест № 2. Параллельность в пространстве**

1. Даны две параллельные прямые *a* и *b*. Через прямую *a* проходит плоскость , не совпадающая с плоскостью данных прямых. Определите взаимное расположение прямой *b* и плоскости .

1) *b* лежит в плоскости .

2) *b* пересекает плоскость .

3) *b* параллельна плоскости .

4) Нельзя определить.

2. Какое наибольшее число плоскостей можно провести через различные пары из трех параллельных прямых?

1) Одну.

2) Две.

3) Три.

4) Шесть.

3. Какое наибольшее число плоскостей можно провести через различные пары из четырех параллельных прямых?

1) Одну.

2) Две.

3) Четыре.

4) Шесть.

4. Через каждую из двух параллельных прямых проведена плоскость. Эти две плоскости пересекаются. Как расположена их линия пересечения относительно данных прямых?

1) Параллельна им.

2) Пересекает их.

3) Совпадает с одной из них.

4) Скрещивается с ними.

5. Даны две скрещивающиеся прямые *a* и *b* и точка *A*, принадлежащая прямой *a*. Как расположена прямая *a* по отношению к проходящей через точку *A* и прямую *b* плоскости?

1) Прямая *a* пересекает плоскость.

2) Прямая *a* параллельна плоскости.

3) Прямая *a* лежит в плоскости.

4) Нельзя определить.

6. Даны скрещивающиеся прямые *c* и *d* и точка *K*. Как относительно друг друга расположены плоскости, проходящие через точку *K* и прямую *c* и точку *K* и прямую *d*?

1) Совпадают.

2) Пересекаются.

3) Параллельны.

4) Нельзя определить.

7. Плоскость пересекается с прямой *a*, которая параллельна плоскости . Как расположены относительно друг друга плоскости и ?

1) Параллельны.

2) Совпадают.

3) Пересекаются.

4) Нельзя определить.

8. Найдите геометрическое место прямых, пересекающих две данные параллельные прямые.

1) Параллельная им прямая, лежащая в плоскости данных прямых.

2) Плоскость данных прямых.

3) Плоскость, параллельная плоскости данных прямых.

4) Все пространство.

9. Найдите геометрическое место прямых, проходящих через данную точку и параллельных данной плоскости.

1) Прямая, параллельная данной плоскости и проходящая через данную точку.

2) Две прямые, параллельные данной плоскости и проходящие через данную точку.

3) Плоскость, параллельная данной плоскости и проходящая через данную точку.

4) Все пространство.

10. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 найдите вектор .

1) .

2) .

3) .

4) .

11. В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 найдите вектор .

1) .

2) .

3) .

4) .

12. В каком случае параллельной проекцией двух параллельных прямых являются две точки?

1) Прямые параллельны плоскости проектирования.

2) Прямые параллельны направлению проектирования.

3) Плоскость прямых совпадает с плоскостью проектирования.

4) Плоскость прямых не параллельна направлению проектирования.

13. Отрезок параллелен плоскости проектирования. Сравните его длину *a* с длиной его проекции *a’*.

1) *a* < *a’*.

2) *a* > *a’*.

3) *a = a’*.

4) *a’ =* 0.

14. Параллельной проекцией куба является квадрат. Как расположен куб относительно направления и плоскости проектирования?

1) Два ребра параллельны плоскости проектирования.

2) Две грани параллельны плоскости проектирования.

3) Четыре ребра параллельны направлению проектирования.

4) Две грани параллельны плоскости проектирования и четыре ребра параллельны направлению проектирования.

15. Изображением какой фигуры является четырехугольник с проведенными в нем диагоналями, одна из которых пунктирная?

1) 4-угольной призмы.

2) 4-угольной пирамиды.

3) 3-угольной призмы.

4) 3-угольной пирамиды.

16. Каково наибольшее число сторон многоугольника, который может получиться в сечении 5-угольной призмы плоскостью?

1) 5.

2) 7.

3) 10.

4) 12.

17. Определите число диагональных сечений 8-угольной призмы.

1) 4.

2) 8.

3) 16.

4) 20.

18. Определите число диагональных сечений 10-угольной пирамиды.

1) 5.

2) 10.

3) 35.

4) 50.

19. Какой фигурой является сечение куба плоскостью, проходящей через середины ребер, выходящих из одной вершины?

1) Квадратом.

2) Прямоугольным треугольником.

3) Правильным шестиугольником.

4) Равносторонним треугольником.

20.Какой фигурой является сечение куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 плоскостью, проходящей через точки *B*1, *M, D*, где *M* – середина ребра *CC*1?

1) Квадратом.

2) Ромбом.

3) Прямоугольником.

4) Параллелограммом.

**Тест № 3. Перпендикулярность в пространстве**

1. Найдите угол между пересекающимися диагоналями граней куба.

1) 30о.

2) 45о.

3) 60о.

4) 90о.

2. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 найдите угол между прямыми *AD*1 и *CB*1.

1) 30о.

2) 45о.

3) 60о.

4) 90о.

3. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, основанием которого является квадрат, в два раза больше стороны основания. Найдите угол между диагоналями параллелепипеда, которые лежат в одном диагональном сечении.

1) 45о.

2) 90о.

3) 30о.

4) 60о.

4. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, основанием которого является квадрат, в два раза больше стороны основания. Найдите угол между диагоналями параллелепипеда, которые лежат в разных диагональных сечениях.

1) 45о.

2) 90о.

3) 30о.

4) 60о.

5. Найдите угол между скрещивающимися ребрами правильной треугольной пирамиды.

1) 30о.

2) 45о.

3) 60о.

4) 90о.

6. Из точки, не принадлежащей плоскости опущен на нее перпендикуляр и проведена наклонная. Найдите проекцию наклонной, если перпендикуляр равен 12 см, а наклонная 15 см.

1) 3 см.

2) 9 см.

3) 27 см.

4) 81 см.

7. Найдите геометрическое место прямых, перпендикулярных данной прямой и проходящих через данную на ней точку.

1) Прямая, перпендикулярная данной прямой и проходящая через данную точку.

2) Плоскость, перпендикулярная данной прямой.

3) Плоскость, параллельная данной прямой.

4) Плоскость, перпендикулярная данной прямой и проходящая через данную точку.

8. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек.

1) Перпендикуляр, проведенный к середине отрезка, соединяющего данные точки.

2) Прямая, параллельная прямой, проходящей через данные точки.

3) Плоскость, перпендикулярная прямой, проходящей через данные точки.

4) Плоскость, перпендикулярная отрезку, соединяющему данные точки и проходящая через его середину.

9. Из данной точки к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная. Зная, что их разность равна 25 см, а расстояние между их серединами 32,5 см, найдите наклонную.

1) 7,5 см.

2) 57,5 см.

3) 97 см.

4) 169 см.

10. Концы отрезка находятся от данной плоскости на расстоянии 26 см и 37 см. Его ортогональная проекция на плоскость равна 6 дм. Найдите отрезок.

1) 61 см.

2) 63 см.

3) 64 см.

4) 65 см.

11. Один из катетов прямоугольного равнобедренного треугольника лежит в плоскости, а другой наклонен к ней под углом 450. Найдите угол между гипотенузой этого треугольника и данной плоскостью.

1) 15о.

2) 30о.

3) 45о.

4) 60о.

12. Найдите угол наклона отрезка к плоскости, если его ортогональная проекция на эту плоскость в два раза меньше самого отрезка.

1) 30о.

2) 45о.

3) 60о.

4) 90о.

13. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от всех точек окружности.

1) Центр окружности.

2) Окружность.

3) Плоскость, перпендикулярная плоскости окружности и проходящая через ее центр.

4) Прямая, перпендикулярная плоскости окружности и проходящая через ее центр.

14. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от всех сторон ромба.

1) Перпендикуляр, проведенный к плоскости ромба и проходящий через его вершину.

2) Плоскость, перпендикулярная к плоскости ромба и проходящая через его диагональ.

3) Перпендикуляр, проведенный к плоскости ромба и проходящий через точку пересечения его диагоналей.

4) Окружность, вписанная в ромб.

15. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, если сторона ее основания равна *a*, боковое ребро *b*.

1) .

2) .

3) .

4) .

16. Найдите двугранный угол между боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1.

1) sin = .

2) sin = .

3) cos = .

4) cos = .

17. Точка *A* находится от одной из двух перпендикулярных плоскостей на расстоянии 4 см, а от другой на 16 см. Найдите расстояние от точки *A* до линии пересечения плоскостей.

1) 6 см.

2) 16 см.

3) 2см.

4) 4см.

18. Найдите двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды, если ее высота равна 2 см, а сторона основания 4 см.

1) 30о.

2) 45о.

3) 60о.

4) 90о.

19. Точка *B*, удаленная от ребра двугранного угла на расстояние *a*, отстоит от каждой его грани на одинаковое расстояние. Найдите это расстояние, если двугранный угол равен .

1) *a*sin .

2) *a*cos .

3) *a*sin .

4) *a*cos .

20. Точка *E* принадлежит плоскости , точка *F* принадлежит плоскости . Плоскости перпендикулярны. Ортогональные проекции отрезка *EF*, равного 10 см, на плоскости и соответственно равны 8 см и 7,5 см. Найдите проекцию отрезка *EF* на линию пересечения плоскостей и .

1) 4,5 см.

2) 6 см.

3) 15,5 см.

4) 20 см.

**Тест № 4. Многогранники**

1. Два плоских угла трехгранного угла равны 98о и 62о. В каких пределах находится третий плоский угол ?

1) 62о < < 98о.

2) 0о < < 160о.

3) 0о < < 36о.

4) 36о < < 160о.

2. Найдите плоские углы трехгранных углов правильной шестиугольной призмы.

1) 45о, 45о, 120о.

2) 60о, 60о, 120о.

3) 90о, 90о, 120о.

4) 90о, 60о, 60о.

3. Найдите плоские углы 4-гранных углов правильной 4-угольной пирамиды, высота которой в два раза меньше диагонали основания.

1) 30о.

2) 45о.

3) 60о.

4) 90о.

4. В правильной четырехугольной пирамиде отношение стороны основания к высоте равно . Найдите плоские углы ее трехгранных углов.

1) 30о, 30о, 90о.

2) 90о, 60о, 45о.

3) 60о, 90о, 60о.

4) 60о, 60о, 60о.

5. Найдите число плоских углов в 5-угольной призме.

1) 10.

2) 15.

3) 30.

4) 50.

6. Найдите число плоских углов в 11-угольной пирамиде.

1) 11.

2) 44.

3) 55.

4) 33.

7. Найдите сумму плоских углов 6-угольной призмы.

1) 1440о.

2) 3600о.

3) 3960о.

4) 4320о.

8. Определите вид призмы, сумма плоских углов которой равна 2160о.

1) 8-угольная.

2) 4-угольная.

3) 3-угольная.

4) 5-угольная.

9. Найдите сумму плоских углов 7-угольной пирамиды.

1) 2160о.

2) 4320о.

3) 1260о.

4) 900о.

10. Определите вид пирамиды, сумма плоских углов которой равна 3240о.

1) 3-угольная.

2) 5-угольная.

3) 7-угольная.

4) 9-угольная.

11. Сколько диагоналей можно провести в кубе?

1) 2.

2) 4.

3) 8.

4) 16.

12. Ребро куба равно *a*. Найдите площадь его диагонального сечения.

1) *a*2.

2) 2*a*2.

3) *a*2.

4) 2*a*2.

13. На какие многогранники разобьется куб, если его рассечь плоскостями, проходящими через его противоположные параллельные ребра?

1) Две 8-угольные пирамиды.

2) Восемь 3-угольных пирамид.

3) Две 4-угольные пирамиды и две 4-угольные призмы.

4) Двадцать четыре 3-угольных пирамид.

14. В кубе провели плоскости через середины ребер, выходящих из одной вершины. Найдите число граней усеченного многогранника.

1) 6.

2) 8.

3) 14.

4) 20.

15. В правильном тетраэдре провели плоскости, каждая из которых отсекает третью часть его ребер, выходящих из одной вершины. Найдите число ребер усеченного многогранника.

1) 12.

2) 18.

3) 24.

4) 36.

16. В октаэдре провели плоскости, каждая из которых отсекает третью часть его ребер, выходящих из одной вершины. Найдите число вершин усеченного многогранника.

1) 14.

2) 24.

3) 36.

4) 48.

17. В икосаэдре провели плоскости, каждая из которых отсекает третью часть его ребер, выходящих из одной вершины. Найдите число ребер усеченного многогранника.

1) 60.

2) 90.

3) 120.

4) 180.

18. Найдите сумму плоских углов додекаэдра.

1) 900о.

2) 2160о.

3) 3240о.

4) 6480о.

19. Найдите двугранный угол правильного тетраэдра.

1) cos = .

2) cos = .

3) cos = .

4) cos = .

20. В правильном тетраэдре *ABCD* с ребром 4 см проведена плоскость через ребро *AD* и точку *M* – середину ребра *BC*. Найдите площадь получившегося сечения.

1) 8см2.

2) 16 см2.

3) 8 см2.

4) 4см2.

**Тест № 5. Круглые тела**

1. Сколько окружностей большого круга можно провести через точку, принадлежащую сфере?

1) Одну.

2) Две.

3) Четыре.

4) Бесконечно много.

2. Какой фигурой является пересечение двух больших окружностей сферы?

1) Окружностью.

2) Прямой.

3) Двумя точками.

4) Отрезком.

3. Сколько сфер можно провести через четыре точки, которые являются вершинами квадрата?

1) Одну.

2) Две.

3) Четыре.

4) Бесконечно много.

4. Сколько касательных плоскостей можно провести через точку, принадлежащую сфере?

1) Ни одной.

2) Одну.

3) Две.

4) Бесконечно много.

5. Шар радиуса 3,4 см пересечен плоскостью на расстоянии 1,6 см от центра. Найдите площадь сечения.

1) 11,56 см2.

2) 5 см2.

3) 9 см2.

4) 256 см2.

6. Через середину радиуса шара перпендикулярно ему проведена плоскость. Площадь получившегося сечения равна 9 см2. Найдите радиус шара.

1) см2.

2) 12 см2.

3) см2.

4) см2.

7. Найдите радиус сферы, описанной около куба с ребром 36 см.

1) 18см.

2) 36см.

3) 9см.

4) см.

8. Найдите радиус сферы, вписанной в куб с ребром 72 см.

1) 72 см.

2) 36 см.

3) 18 см.

4) 9 см.

9. Сколько осевых сечений имеет цилиндр?

1) Одно.

2) Две.

3) Четыре.

4) Бесконечно много.

10. В цилиндре, радиус основания которого равен 20 см и высота равна 15 см, проведена плоскость параллельно оси на расстоянии 12 см от нее. Найдите площадь сечения.

1) 240 см2.

2) 300 см2.

3) 480 см2.

4) 720 см2.

11. В конусе с высотой 3,45 см и радиусом основания 6 см проведено сечение параллельно основанию на расстоянии 1,725 см от вершины. Найдите площадь сечения.

1) 3 см2.

2) 9 см2.

3) 1,725 см2.

4) 18 см2.

12. Прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *C* вращается вокруг прямой *AC*. Какая фигура получается при этом от вращения точки *B*?

1) Окружность.

2) Круг.

3) Отрезок.

4) Точка.

13. Прямоугольная трапеция *ABCD* с прямыми углами *A* и *B* вращается вокруг прямой, проходящей через вершину острого угла и параллельной меньшей боковой стороне. Какая фигура получится при этом от вращения меньшего основания *BC*?

1) Круг.

2) Отрезок.

3) Две концентрические окружности.

4) Кольцо.

14. Какое движение оставляет на месте только одну точку?

1) Параллельный перенос.

2) Центральная симметрия.

3) Осевая симметрия.

4) Зеркальная симметрия.

15. Сколько осей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед, не имеющий квадратных граней?

1) 3.

2) 4.

3) 6.

4) 12.

16. Сколько осей симметрии имеет цилиндр?

1) 1.

2) 2.

3) 4.

4) Бесконечно много.

17. Сколько плоскостей симметрии имеет прямоугольный параллелепипед, не имеющий квадратных граней?

1) 2.

2) 3.

3) 4.

4) 6.

18. Сколько у правильной 9-угольной призмы осей симметрии?

1) Ни одной.

2) 3.

3) 9.

4) 18.

19. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная 10-угольная пирамида?

1) Ни одной.

2) 5.

3) 10.

4) 20.

20. Сколько плоскостей симметрии имеет правильная 5-угольная усеченная пирамида?

1) Ни одной.

2) 5.

3) 10.

4) 20.

**Тест № 6. Объем и площадь поверхности**

1.Найдите объем правильной треугольной призмы, каждое ребро которой равно *a*.

1) *a*3.

2) *a*3.

3) 6 *a*3.

4) *a*3.

2. Основанием прямой призмы, имеющей высоту 3 см, служит трапеция с основаниями 4см, 3см и высотой 2см. Найдите объем призмы.

1) 32 см3.

2) 33 см3.

3) 24 см3.

4) 36 см3.

3. Два цилиндра имеют равные основания. Объем первого равен 4,5 дм3, его высота равна 24 см. Высота второго цилиндра равна 8 см. Найдите его объем.

1) 1,5 дм3.

2. 1,5 см3.

3) 4,5 см3.

4) 4,5 дм3.

4. Высота первого цилиндра в два раза больше высоты второго. Диаметр основания первого цилиндра в три раза больше диаметра основания второго цилиндра. Во сколько раз объем первого цилиндра больше объема второго?

1) В 6 раз.

2) В 12 раз.

3) В 18 раз.

4) В 24 раза.

5. Как изменился объем правильной пирамиды, если ее высота увеличена в 4 раза, а сторона основания уменьшена в два раза?

1) Увеличился в 2 раза.

2) Увеличился в раза.

3) Уменьшился в 2 раза.

4) Не изменился.

6. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой сторона основания равна *a*, а двугранный угол при основании равен 45о.

1) *a*3.

2) .

3) .

4) .

7. Центр верхнего основания правильной 4-угольной призмы и середины сторон нижнего основания являются вершинами вписанной в призму пирамиды. Найдите ее объем, если объем призмы равен *V*.

1) .

2) .

3) .

4) .

8. Найдите объем шара, вписанного в куб с ребром *a*.

1) *a*3.

2) *a*3.

3) *a*3.

4) *a*3.

9. Найдите площадь поверхности правильной 6-угольной призмы, все ребра которой равны 1.

1) 6.

2) 6.

3) 3(+2).

4) 6+1.

10. Найдите площадь поверхности правильной треугольной пирамиды, все ребра которой равны *b*.

1) 3*b*2.

2) 6*b*2.

3) *b*2.

4) 3*b*2.

11. Как изменится площадь боковой поверхности цилиндра, если диаметр его основания увеличить в 4 раза, не изменяя его высоты?

1) Увеличится в 2 раза.

2) Увеличится в 3 раза.

3) Увеличится в 4 раза.

4) Увеличится в 8 раз.

12. Площадь поверхности равностороннего цилиндра (осевое сечение – квадрат) равна 2,4 м2. Найдите площадь его боковой поверхности.

1) 1,2 м2.

2) 1,6 м2.

3) 1,8 м2.

4) 3,2 м2.

13. Радиус основания конуса равен 2,5 см, образующая 8 см. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

1) 20 см2.

2) 10 см2.

3) 16 см2.

4) 20 см2.

14. Равносторонние конус и цилиндр (осевые сечения – равносторонний треугольник и квадрат соответственно) имеют равные высоты. Как относятся площади боковых поверхностей конуса и цилиндра?

1) 1:2.

2) 1:3.

3) 2:3.

4) 3:5.

15. Найдите площадь поверхности полушара с радиусом 7 дм.

1) 49 дм2.

2) 98 дм2.

3) 147 дм2.

4) 196 дм2.

16. В шар вписан цилиндр, у которого радиус основания равен *a*, а высота в 4 раза больше. Найдите площадь поверхности шара.

1) 4*a*2.

2) 5*a*2.

3) 20*a*2.

4) *a*2.

17. В равносторонний конус (осевое сечение – равносторонний треугольник) вписан шар. Найдите площадь поверхности шара, зная, что образующая конуса равна 2 см.

1) 16 см2.

2) см2.

3) см2.

4) 4 см2.

18. В шар, площадь поверхности которого равна 64 см2 вписан конус, образующая которого равна 6 см. Найдите объем конуса.

1) см3.

2) см3.

3) 64 см3.

4) см3.

19. Прямоугольный равнобедренный треугольник с гипотенузой *c* вращается вокруг прямой, проходящей через вершину прямого угла параллельно гипотенузе. Найдите объем тела вращения.

1)  *c*3.

2)  *c*3.

3)  *c*3.

4)  *c*3.

20. Площадь равностороннего треугольника равна *Q*. Треугольник вращается вокруг прямой, на которой лежит одна из его сторон. Найдите площадь поверхности тела вращения.

1) *Q*см2.

2) 2*Q*см2.

3) 4*Q* см2.

4) *Q* см2.

**Тест № 7. Координаты и векторы**

1. Найдите координаты ортогональной проекции точки *A*(-5, 6, -7) на плоскость *Oyz*.

1) (0, 6, -7).

2) (-5, 0, -7).

3) (-5, 0, 0).

4) (-5, 6, 0).

2. Найдите расстояние от точки *B*(3, -8, -11) до плоскости *Oxy*.

1) –11.

2) 11.

3) 3.

4) 8.

3. На каком расстоянии от оси *Oz* находится точка *C*(1, -5, 6)?

1) 5.

2) 2.

3) 6.

4) .

4. Найдите расстояние между точками *E*(-1, 0, 4) и *F*(2, -5, 1).

1) 5.

2) .

3) .

4) .

5. Найдите координаты середины отрезка *GH*, если *G*(3, -2, 0), *H*(0, -12, 5).

1) (, -5, 5).

2) (3, -7, -).

3) (, -7, ).

4) (-3, 7, - ).

6. Найдите координаты центра сферы, заданной уравнением *x*2 + *y*2 + *z*2 + 2*y* – 4*z* + 1 = 0.

1) (1, -1, 2).

2) (1, 2, -1).

3) (0, -1, 2).

4) (0, 1, -2).

7. Найдите координаты вектора , если *I*(5, -1, 2), *J*((3, -2, 0).

1) (2, -1, 2).

2) (-2, -1, 2).

3) (2, -3, 2).

4)(-2, -1, -2).

8. Найдите длину вектора , если *K*(0, -1, 2), *L*(-3, 5, 0).

1) .

2) 7.

3) 5.

4) 2.

9. Найдите длину вектора 5-+2.

1) 36.

2) 6.

3) .

4) 2.

10. Длина вектора равна 9. Найдите его координаты, если известно, что все они равны.

1) (,,).

2) (-, -, -).

3) (,,) и (-, -, -).

4) (3, 3, 3) и (-3, -3, -3).

11. Найдите скалярное произведение векторов (-5, 6, 1) и (0, -9, 7).

1) –52.

2) 47.

3) –47.

4) –56.

12. При каком значении *k* векторы 2-*k* и + перпендикулярны, если (0, 1, -2) и (2, 0, 1)?

1) 2.

2) 3.

3) -3.

4) Нет решения.

13. При каких значениях *m* угол между векторами (0, *m*, -2) и (-1, 0, -1) равен 60о?

1) 2.

2) -2.

3) 2 и –2.

4) 2 и -2.

14. Найдите координаты единичного вектора , перпендикулярного векторам (1, 1, 0) и (0, 1, 1).

1) (,,) и (-, -, -).

2) (-,,) и (, -, -).

3) (,-,).

4) (, -,) и (-,, -).

15. Точка *M*(2, 1, *m*) принадлежит плоскости 3*x* – *y* +2*z* –1 = 0. Найдите *m*.

1) 3.

2)-3.

3) 2.

4) –2.

16. Точка *N*(1, *m*, *n*) принадлежит линии пересечения плоскостей *x* + *y* – *z* – 4 = 0 и 2*x* – *y* + 4*z* –1 = 0. Найдите ее координаты.

1) (4, 1, 1).

2) (-4, 4, -4).

3) (1, 3,).

4) (1,0,3).

17. Найдите уравнение плоскости, параллельной плоскости 4*x* – 5*y* +2*z* +11 = 0 и проходящей через точку *P*(3, -2, -4).

1) 4*x* – 5*y* +2*z* – 10 = 0.

2) 8*x* – 10*y* +4*z* +22 = 0.

3) 4*x* – 5*y* +2*z* +14 = 0.

4) 4*x* – 5*y* +2*z* -14 = 0.

18. Составьте уравнение геометрического места точек, которые находятся от оси *Ox* на расстоянии *h*.

1) *x*2 = *h*.

2) *y*2 + *z*2 = *h*2.

3) *y*2 + *z*2 = *h*.

4) *x*2 + *y*2 + *z*2 = *h*2.

19. Определите, какая фигура в пространстве задается уравнением *y*2 + *z*2 = 0.

1) Плоскость *Oyz*.

2) Ось *Ox*.

3) Оси *Oy* и *Oz*.

4) Плоскости *Oxy* и *Oxz*.

20. Определите, какая фигура в пространстве задается неравенством *z* > 0.

1) Полуось *Oz*.

2) Полупространство, ограниченное координатной плоскостью *Oyz*.

3) Полупространство, ограниченное координатной плоскостью *Oxz*.

4) Полупространство, ограниченное координатной плоскостью *Oxy*.

**§ 5. ЗАЧЕТЫ**

**Зачет № 1. Начала стереометрии**

# **Вопросы**

1. Основные понятия стереометрии.

2. Аксиомы стереометрии (запись, чертеж).

3. Аксиомы стереометрии (формулировки).

4. Понятие равенства двух фигур в пространстве.

5. Понятие подобия двух фигур в пространстве.

6. Следствие 1 (формулировка, доказательство).

7. Следствие 2 (формулировка, доказательство).

8. Следствие 3 (формулировка, доказательство).

9. Понятие многогранника. Примеры многогранников.

10. Понятие призмы (прямая призма, правильная призма).

11. Понятие пирамиды (правильная пирамида).

12. Нахождение количества вершин, ребер и граней *n*-угольной призмы.

13. Нахождение количества вершин, ребер и граней *n*-угольной пирамиды.

14. Определение диагонали многогранника (нахождение количества диагоналей *n*-угольной призмы).

15. Понятие развертки многогранника (примеры разверток многогранников).

16. Различные способы изготовления моделей многогранников.

## Задачи

1. Докажите, что существует точка, не принадлежащая данной плоскости.

2. Докажите, что через каждую точку пространства можно провести прямую.

3. Докажите, что через каждую точку пространства можно провести плоскость.

4. Докажите, что в каждой плоскости лежит по крайней мере одна прямая.

5. Докажите, что через каждую точку пространства можно провести бесконечно много прямых.

6. Докажите, что через каждую точку пространства можно провести бесконечно много плоскостей.

7. Докажите, что в каждой плоскости существуют три точки, не принадлежащие одной прямой.

8. Докажите, что через каждую прямую можно провести плоскость.

9. Докажите, что через каждую прямую можно провести бесконечно много плоскостей.

10. Точки *K, L, M* и *N* не принадлежат одной плоскости. Докажите, что прямые *KL* и *MN* не пересекаются.

11. Точки *X, Y, Z* принадлежат каждой из двух плоскостей и . Докажите, что данные точки принадлежат одной прямой.

12. Точка *C* принадлежит прямой *AB*, точка *D* не принадлежит этой прямой, точка *E* принадлежит прямой *AD*. Докажите, что плоскости *ABD* и *CDE* совпадают.

13. Даны две плоскости и , пересекающиеся по прямой *c*, В плоскости лежит прямая *a*, которая пересекается с плоскостью . Докажите, что прямые *a* и *c* пересекаются.

14. Даны две плоскости и , пересекающиеся по прямой *m*. Точка *G* принадлежит плоскости , точка *M* принадлежит прямой *m*. Верны ли утверждения: а) прямая *GM* лежит в плоскости ; б) прямая *GM* не лежит в плоскости ?

15. Даны три попарно пересекающиеся плоскости: = *a*, = *b*, = *c*. Прямые *a* и *b* пересекаются в точке *H*. Докажите, что прямая *c* проходит через точку *H*.

16. Даны четыре прямые, из которых каждые две пересекаются. Докажите, что все данные прямые либо лежат в одной плоскости, либо проходят через одну точку.

## Зачет № 2. Параллельность в пространстве

**Вопросы**

1. Определение параллельности двух прямых в пространстве (какие две прямые в пространстве не параллельны).

2. Теорема о том, что через точку в пространстве, не принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной (формулировка, доказательство).

3. Определение двух скрещивающихся прямых в пространстве (какие две прямые в пространстве не скрещиваются).

4. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

5. Признак скрещивающихся прямых (формулировка, доказательство).

6. Определение параллельности прямой и плоскости (взаимное расположение прямой и плоскости).

7. Свойство, связывающее понятие параллельности прямой и плоскости и параллельности двух прямых (признак параллельности двух прямых в пространстве, формулировка, доказательство).

8. Признак параллельности прямой и плоскости (формулировка, доказательство).

9. Определение параллельности двух плоскостей (взаимное расположение двух плоскостей).

10. Свойство, связывающее понятие параллельности двух плоскостей и параллельности двух прямых (формулировка, доказательство).

11. Признак параллельности двух плоскостей (формулировка, доказательство).

12. Определение вектора в пространстве (обозначение, изображение, понятие длины вектора, одинаково и противоположно направленные векторы, равенство векторов).

13. Свойства сложения векторов (запись, доказательства).

14. Свойства умножения вектора на число (запись, доказательства).

15. Понятия коллинеарных и компланарных векторов (определения, примеры).

16. Теорема о представлении компланарных векторов (формулировка, доказательство).

17. Понятие параллельного переноса (определение, примеры, свойства).

18. Понятие параллельного проектирования (определение, примеры, параллельная проекция точки, параллельная проекция фигуры).

19. Свойства параллельного проектирования (формулировки, доказательства).

20. Построение параллельных проекций плоских фигур (различные расположения относительно направления и плоскости проектирования).

## Задачи

1. Дан прямоугольный параллелепипед *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. *E* и *F* – точки пересечения диагоналей граней *ABB*1*A*1 и *DCC*1*D*1. Докажите, что прямая *EF* параллельна плоскостям *ABC* и *A*1*B*1*C*1.

2. Через точку, не принадлежащую данной прямой, проведите прямую, параллельную данной.

3. Через точку, не принадлежащую данной плоскости, проведите прямую, параллельную данной плоскости.

4. Через точку, не принадлежащую данной плоскости, проведите плоскость, параллельную данной.

5. Даны две параллельные прямые. Через одну из них проведите плоскость, параллельную другой прямой.

6. Через одну из скрещивающихся прямых проведите плоскость, параллельную другой прямой.

7. Через две скрещивающиеся прямые проведите параллельные плоскости.

8. Докажите, что если прямая пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

9. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

10. Докажите, что два угла с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны и лежат в параллельных плоскостях.

11. Докажите, что две плоскости, параллельные третьей, параллельны между собой.

12. Даны три вектора , , , каждые два из которых неколлинеарны. Найдите их сумму, если вектор коллинеарен вектору , а вектор коллинеарен вектору .

13. В прямом параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 проведите сечение через середины двух ребер, выходящих из одной вершины нижнего основания и точку пересечения диагоналей верхнего основания.

14. Проведите сечение через сторону нижнего основания прямоугольного параллелепипеда и через точку, принадлежащую боковому ребру противолежащей грани.

15. Дан параллелепипед *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Точки *E, F, G* принадлежат соответственно ребрам *AD, CC*1 и внутренней части грани *A*1*B*1*C*1*D*1. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью *EFG*.

16. Дан параллелепипед *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Точки *K, L, M* принадлежат соответственно ребру *BB*1 и внутренним частям граней *BB*1*C*1*C* и *A*1*B*1*C*1*D*1. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью *KLM*.

17. Дана прямая треугольная призма *ABCA*1*B*1*C*1. Проведите сечение через точки *D, E*, принадлежащие соответственно ребрам *BB*1, *CC*1 и точку *F* – внутреннюю точку призмы.

18. Проведите сечение в треугольной призме через две точки, принадлежащие двум боковым граням, и точку, принадлежащую противоположному ребру нижнего основания.

19. В кубе проведите сечение через середины двух ребер, выходящих из одной вершины, и точку пересечения диагоналей куба – центр куба.

20. В прямой 5-угольной призме проведите сечение через две точки, принадлежащие боковым ребрам одной грани, и точку внутри призмы.

## Зачет № 3. Перпендикулярность в пространстве

**Вопросы**

1. Определение угла между прямыми в пространстве (пересекающиеся, скрещивающиеся и перпендикулярные прямые).

2. Теорема об углах с сонаправленными сторонами (формулировка, доказательство).

3. Определение перпендикулярности прямой и плоскости (доказательство того, что прямая, перпендикулярная плоскости, пересекает эту плоскость).

4. Признак перпендикулярности прямой и плоскости (формулировка, доказательство).

5. Определение ортогонального проектирования (формулировка его свойств).

6. Определение перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость (определения высоты пирамиды, высоты призмы).

7. Определение наклонной к плоскости (определение ортогональной проекции наклонной).

8. Теорема о перпендикуляре и наклонной, проведенных к плоскости из одной и той же точки (формулировка, доказательство).

9. Теорема о трех перпендикулярах (формулировка, доказательство, обратная теорема).

10. Определение угла между наклонной и плоскостью (определение прямой, перпендикулярной плоскости).

11. Теорема об угле между наклонной и плоскостью (формулировка, доказательство).

12. Определение расстояния между плоскостью и не принадлежащей ей точкой, параллельными плоскостями.

13. Теорема о расстоянии между параллельными плоскостями (формулировка, доказательство).

14. Определение расстояния между скрещивающимися прямыми.

15. Теорема об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым.

16. Понятие двугранного угла (определение, изображение, грань, ребро, линейный угол двугранного угла).

17. Свойство величины линейного угла двугранного угла.

18. Определение угла между пересекающимися плоскостями (перпендикулярные плоскости).

19. Признак перпендикулярности двух плоскостей.

20. Доказательство того, что если две плоскости перпендикулярны, то любая прямая, лежащая в одной из них и перпендикулярная линии их пересечения, перпендикулярна другой плоскости.

21\*. Понятие центрального проектирования (определение, примеры, центральная проекция точки, центральная проекция фигуры).

22\*. Теорема о центральной проекции плоской фигуры, расположенной в плоскости, параллельной плоскости проектирования.

23\*. История возникновения и развития учения о перспективе.

24\*. Изображение плоских фигур в центральной проекции (изображение параллельных прямых).

25\*. Изображение пространственных фигур в центральной проекции (примеры, изображение куба).

## Задачи

1. Через данную на прямой точку проведите плоскость, перпендикулярную данной прямой.

2. Через точку, не принадлежащую данной прямой, проведите плоскость, перпендикулярную этой прямой.

3. Через данную в плоскости точку проведите прямую, перпендикулярную данной плоскости.

4. Через точку, не принадлежащую данной плоскости, проведите прямую, перпендикулярную данной плоскости.

5. Докажите, что две плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны между собой.

6. Докажите, что две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

7. Докажите, что если плоскость и прямая перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны или прямая лежит в плоскости.

8. Даны две прямые *a, b* и плоскость . Прямая *a* параллельна плоскости , а прямая *b* ей перпендикулярна. Докажите, что данные прямые перпендикулярны.

9. Даны две скрещивающиеся прямые. Проведите прямую, пересекающую обе данные прямые и перпендикулярную им обеим.

10. Через данную точку проведите прямую, перпендикулярную двум скрещивающимся прямым.

11. Через данную прямую проведите плоскость, перпендикулярную данной плоскости.

12. Через прямую *a*, параллельную плоскости , проведите плоскость , пересекающую плоскость под данным углом .

13. Докажите, что из всех прямых, лежащих в одной грани двугранного угла и проходящих через данную точку, наибольший угол с другой гранью образует прямая, перпендикулярная ребру двугранного угла.

14. Докажите, что при пересечении двух параллельных плоскостей третьей плоскостью, внутренние накрест лежащие двугранные углы равны.

15. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от концов данного отрезка.

16. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от трех данных точек.

17. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых.

18. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей.

19. Найдите геометрическое место точек, удаленных от данной плоскости на данное расстояние.

20. Найдите геометрическое место ортогональных проекций наклонных, проведенных из точки, не принадлежащей данной плоскости и образующих с этой плоскостью угол, равный данному.

21\*. Изобразите в центральной проекции треугольник, плоскость которого находится между центром проектирования и плоскостью проектирования.

22\*. Изобразите центральную проекцию правильной 4-угольной пирамиды на плоскость, параллельную ее основанию.

23\*. Проведите сечение треугольной пирамиды через две точки, принадлежащие ее боковым граням, и точку, взятую внутри пирамиды.

24\*. Через точку, принадлежащую основанию треугольной пирамиды, проведите сечение, параллельное двум непересекающимся ее ребрам.

25\*. Проведите сечение через две точки, принадлежащие противоположным боковым граням 4-угольной пирамиды, и точку, принадлежащую ее основанию.

## Зачет № 4. Многогранники

**Вопросы**

1. Понятие многогранного угла (определение, изображение, обозначение, вершина, ребра, грани, плоские и двугранные углы многогранного угла, типы многогранных углов).

2. Теорема о плоских углах трехгранного угла (формулировка, доказательство).

3. Понятие многогранника (определение, элементы многогранника, примеры).

4. Понятие призмы (определение, изображение, типы призм, количество вершин, ребер, граней, плоских углов, диагоналей, диагональных сечений).

5. Понятие прямой призмы (определение, свойства).

6. Понятие правильной призмы (определение, свойства).

7. Понятие параллелепипеда (определение, свойства).

8. Понятие пирамиды (определение, изображение, типы пирамид, количество вершин, ребер, граней, плоских углов, диагональных сечений).

9. Понятие правильной пирамиды (определение, свойства).

10. Понятие усеченной пирамиды (определение, изображение, количество вершин, ребер, граней, плоских углов, диагональных сечений, правильная усеченная пирамида).

11\*. Понятие выпуклой фигуры (определение, примеры выпуклых и невыпуклых фигур).

12\*. Теорема о сумме всех плоских углов выпуклого многогранного угла (формулировка и доказательство).

13\*. Понятие выпуклого многогранника (определение, свойства).

14\*. Теорема Эйлера (формулировка и доказательство).

15. Понятие правильного многогранника (определение, типы).

16. Исторические сведения о пяти телах Платона.

17\*. Понятие полуправильного многогранника (определение, типы).

18\*. Исторические сведения о телах Архимеда.

19\*. Понятие звездчатого многогранника (правильные звездчатые многогранники – тела Кеплера-Пуансо).

20\*. Кристаллы – природные многогранники (названия, примеры).

## Задачи

1. Проведите сечение трехгранного угла, у которого все плоские углы прямые, таким образом, чтобы в сечении получился треугольник, равный данному.

2. Проведите сечение 4-гранного угла таким образом, чтобы в сечении получился параллелограмм.

3. Через вершину трехгранного угла проведите плоскость, которая образует с его гранями равные углы.

4. Через вершину трехгранного угла проведите плоскость, которая образует с его ребрами равные углы.

5. Докажите, что плоскости, каждая из которых проходит через боковое ребро треугольной пирамиды и через пересекающуюся с ним медиану противоположной грани, пересекаются по одной прямой.

6. Докажите, что 6 плоскостей, каждая из которых проходит через одно из ребер треугольной пирамиды и середину противоположного ребра, пересекаются в одной точке.

7. Докажите, что если диагональные плоскости 4-угольной призмы перпендикулярны ее основаниям, то призма прямая.

8. Докажите, что если диагонали параллелепипеда равны между собой, то параллелепипед прямоугольный.

9. Докажите, что сумма квадратов диагоналей прямоугольного параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер.

10. Докажите, что плоскость, проходящая через концы трех ребер параллелепипеда, выходящих из одной вершины, отсекает третью часть его диагонали, выходящей из той же вершины.

11. Докажите, что если через каждую вершину верхнего основания треугольной призмы и через противоположное ей ребро нижнего основания провести плоскость, то эти плоскости пересекутся в точке, принадлежащей прямой, проходящей через точки пересечения медиан оснований данной призмы.

12. Постройте куб по данной его диагонали.

13. Постройте правильный тетраэдр по его ребру.

14. Постройте октаэдр по его ребру.

15. Докажите, что правильный тетраэдр двойственен самому себе.

16. Постройте прямую четырехугольную призму по ее основанию и одной из диагоналей.

17. Постройте треугольную пирамиду по ее основанию, высоте и двум боковым ребрам.

18. Постройте треугольную пирамиду по ее основанию и двум углам, которые образуют боковые ребра с основанием.

19. Постройте треугольную пирамиду по ее основанию и трем боковым ребрам.

20. Постройте треугольную пирамиду по ее боковым ребрам и плоским углам при вершине.

21\*. Докажите, что любой выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

22\*. Докажите, что для невыпуклой призмы выполняется соотношение Эйлера.

23\*. Докажите, что для невыпуклой пирамиды выполняется соотношение Эйлера.

24\*. Найдите многогранник, который является пересечением тетраэдров, образующих звездчатый октаэдр. Найдите его ребра, если ребро куба, в который вписан звездчатый октаэдр, равно 1.

25\*. Впишите в данный куб ромбододекаэдр.

**Зачет № 5. Круглые тела**

**Вопросы**

1. Понятия сферы и шара (определения, центр, радиус, касательная плоскость, большая окружность, большой круг, касательная прямая).

2. Различные случаи взаимного расположения сферы и плоскости.

3. Теорема об отрезках касательных прямых, проведенных к сфере из одной точки (формулировка, доказательство).

4. Теорема об ортогональной проекции сферы (формулировка, доказательство).

5. Понятие многогранника, вписанного в сферу (определение, примеры).

6. Теорема о сфере, описанной около треугольной пирамиды (формулировка, доказательство).

7. Теорема о сфере, описанной около призмы (формулировка, доказательство).

8. Понятие многогранника, описанного около сферы (определение, примеры).

9. Теорема о сфере, вписанной в треугольную пирамиду (формулировка, доказательство).

10. Теорема о сфере, вписанной в призму (формулировка, доказательство).

11. Понятие цилиндра (определение, элементы цилиндра).

12. Понятие конуса (определение, элементы конуса).

13. Понятие усеченного конуса (определение, элементы усеченного конуса).

14. Понятия поворота и фигуры вращения (определение, примеры).

15\*. Теорема о вращении прямой, скрещивающейся с осью вращения (формулировка, доказательство).

16. Понятия сферы, вписанной и описанной около цилиндра (определения, примеры).

17. Теорема о сфере, вписанной в цилиндр (формулировка, доказательство).

18. Понятия цилиндра, вписанного и описанного около прямой призмы (определения, примеры, касательная плоскость к цилиндру).

19\*. Фокальное свойство эллипса (формулировка, доказательство).

20. Понятия сферы, вписанной и описанной около конуса (определения, примеры).

21. Теорема о сфере, вписанной в конус (формулировка, доказательство).

22. Теорема о сфере, описанной около конуса (формулировка, доказательство).

23. Понятия конуса, вписанного и описанного около пирамиды (определения, примеры, касательная плоскость к конусу).

24\*. Теорема о сечении конической поверхности, при котором получается эллипс (формулировка, доказательство).

25\*. Теорема о сечении конической поверхности, при котором получается парабола (формулировка, доказательство).

26\*. Теорема о сечении конической поверхности, при котором получается гипербола (формулировка, доказательство).

27. Понятие симметрии (определение, центральная, осевая и зеркальная симметрии).

28. Понятие о движении (определение, примеры движений).

29. Теоремы о движениях (формулировки, доказательства).

30\*. Понятие ориентации поверхности (определение, примеры ориентируемых и неориентируемых поверхностей).

**Задачи**

1. Докажите, что сечением сферы плоскостью является окружность.

2. Докажите, что две большие окружности сферы, пересекаясь, делят друг друга пополам.

3. Докажите, что через две точки сферы, не принадлежащие одному диаметру, можно провести большую окружность и притом только одну.

4. Докажите, что плоскость, проходящая через конец радиуса сферы перпендикулярно ему, является касательной плоскостью.

5. Докажите, что касательная плоскость к сфере перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

6. Докажите, что около любой правильной пирамиды можно описать сферу.

7. Докажите, что около любой правильной призмы можно описать сферу.

8. Докажите, что в любую правильную пирамиду можно вписать сферу.

9. Докажите, что все плоскости, пересекающие данную сферу по окружностям данного радиуса, касаются сферы, концентрической данной.

10. Докажите, что цилиндрическая поверхность, ось которой проходит через центр сферы, пересекает ее по окружности.

11. Докажите, что коническая поверхность, ось которой проходит через центр сферы, пересекает ее по окружности.

12. Найдите геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой.

13. Найдите геометрическое место центров сфер данного радиуса, касающихся боковой поверхности данного цилиндра.

14. Найдите геометрическое место центров сфер данного радиуса, пересекающих данную плоскость по окружностям данного радиуса.

15. Докажите, что в цилиндр можно вписать сферу, если его осевым сечением является квадрат (равносторонний цилиндр).

16. Докажите, что если в усеченный конус можно вписать сферу, то его образующая равна сумме радиусов обоих оснований.

17. Найдите геометрическое место прямых, образующих данный угол с данной прямой и проходящих через данную на ней точку.

18. Найдите геометрическое место центров сфер, проходящих через вершины данного треугольника.

19. Найдите геометрическое место центров сфер данного радиуса, касающихся граней данного двугранного угла.

20. Найдите геометрическое место центров сфер данного радиуса, касающихся граней данного трехгранного угла.

21\*. Найдите фигуру, которая получится при вращении правильной 4-угольной пирамиды вокруг прямой, соединяющей середины одной из сторон основания и скрещивающегося с ней бокового ребра.

22\*. Прямоугольный лист бумаги свернули в боковую поверхность цилиндра с радиусом основания *R* и провели сечение, составляющее с плоскостью основания угол . Затем боковую поверхность цилиндра развернули обратно в прямоугольник. Найдите уравнение полученной кривой.

23. Докажите, что касательная плоскость к цилиндру перпендикулярна плоскости, проходящей через образующую касания и ось цилиндра.

24. Докажите, что две не параллельные плоскости, касающиеся цилиндра, пересекаются по прямой, параллельной оси цилиндра.

25. Докажите, что плоскость, касательная к конусу, перпендикулярна плоскости, проходящей через образующую касания и ось конуса.

26. Докажите, что прямая, касательная к окружности основания конуса, перпендикулярна образующей конуса, проходящей через точку касания.

27. Докажите, что если одна из боковых граней треугольной призмы, вписанной в цилиндр, проходит через его ось, то две другие ее боковые грани перпендикулярны.

28. Докажите, что две прямые, симметричные относительно некоторой плоскости, лежат в одной плоскости.

29. Докажите, что если фигура имеет ось симметрии *n*-го порядка, *n = n*1 *n*2, где *n*1, *n*2 – натуральные числа, то она имеет также оси симметрии порядка *n*1 и *n*2.

30. Найдите геометрическое место точек, симметричных данной точке относительно всех точек данной прямой.

31\*. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 600. Под каким углом к плоскости основания конуса нужно провести плоскость, чтобы в сечении конической поверхности получить: а) эллипс; б) параболу; в) гиперболу?

32\*. Образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом 45о. Под каким углом к плоскости основания нужно провести плоскость, чтобы в сечении конической поверхности получить: а) эллипс; б) параболу; в) гиперболу?

**Зачет № 6. Объем и площадь поверхности**

**Вопросы**

1. Понятие объема фигуры (определение, свойства).

2. Объем прямого цилиндра (формулировка, доказательство).

3. Объемы прямой призмы и прямого кругового цилиндра (формулировки, доказательства).

4. Принцип Кавальери (формулировка, примеры).

5. Объем наклонного цилиндра (формулировка, доказательство).

6. Объемы наклонной призмы и наклонного кругового цилиндра (формулировки, доказательства).

7. Теорема об объемах двух конусов с равными высотами и основаниями равной площади (формулировка, доказательство).

8. Объем пирамиды (формулировка, доказательство).

9\*. Объем усеченной пирамиды (формулировка, доказательство).

10. Исторические сведения об измерении объемов пространственных фигур.

11. Объем конуса (формулировка, доказательство).

12\*. Объем усеченного конуса (формулировка, доказательство).

13. Объем шара (формулировка, доказательство).

14. Объем шарового сегмента (формулировка, доказательство).

15. Понятие площади поверхности многогранника (определение, примеры).

16. Площадь поверхности цилиндра (формулировка, доказательство).

17. Площадь поверхности конуса (формулировка, доказательство).

18. Площадь поверхности усеченного конуса (формулировка, доказательство).

19. Площадь поверхности шара (формулировка, доказательство).

20. Площадь поверхности шарового сегмента (формулировка, доказательство).

**Задачи**

1. Докажите, что площади боковых поверхностей двух цилиндров, объемы которых равны, относятся как радиусы их оснований.

2. Докажите, что если два цилиндра равновелики, то площади их боковых поверхностей обратно пропорциональны радиусам оснований.

3. Докажите, что объем призмы, основанием которой является трапеция, равен произведению среднего арифметического между площадями параллельных боковых граней на расстояние между ними.

4. В основании четырехугольной призмы лежит ромб. Диагональные сечения перпендикулярны плоскости основания и площади их равны соответственно 100 см2 и 105 см2; длина их линии пересечения равна 10 см. Найдите объем и площадь боковой поверхности данной призмы.

5. Найдите объем параллелепипеда, если площади двух его граней равны *P* и *Q*, их общее ребро равно *b*, двугранный угол между ними равен 30о.

6. В треугольной призме площадь одной из ее боковых граней равна *m*2, а расстояние от нее до противоположного ребра равно *h*. Найдите объем призмы.

7. В кубе с ребром *a* взято 5 точек: центр верхней грани и середины сторон нижней грани. Эти точки служат вершинами многогранника, вписанного в куб. Найдите его объем и площадь поверхности.

8. Основанием пирамиды является правильный шестиугольник со стороной *a*. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания. Найдите объем и площадь боковой поверхности данной пирамиды.

9. Найдите отношения объемов и боковых поверхностей двух цилиндров, один из которых описан около правильной треугольной призмы, а другой вписан в нее.

10. В цилиндре площадь сечения, перпендикулярного оси, равна *Q*, площадь осевого сечения равна *S*. Найдите объем цилиндра и площадь его поверхности.

11. На основаниях равностороннего цилиндра, диаметры которых равны 2 дм, построены два конуса с вершинами в середине оси цилиндра. Найдите сумму объемов конусов и сумму площадей их поверхностей.

12. Около конуса с радиусом основания *R* описана пирамида, у которой периметр основания равен 2*p*. Найдите отношение их объемов и отношение площадей их боковых поверхностей.

13. Треугольник со сторонами 10 дм, 17 дм и 21 дм вращается вокруг большей стороны. Найдите объем и площадь поверхности полученного тела.

14. Два конуса имеют образующую одинаковой длины *l*. Развертки их боковых поверхностей дополняют друг друга до круга. Площади поверхностей относятся как 1:6. Найдите радиусы оснований данных конусов.

15. Конус, имеющий высоту *h*, радиус основания *r*, пересечен двумя плоскостями, параллельными его основанию и делящими высоту на три равные части. Найдите объем средней части.

16. Дана четверть круга *OABC* с центром в точке *O* и дугой *ACB*. В ней проведена хорда *AB*. Докажите, что объемы фигур, которые получаются при вращении треугольника *AOB* и сегмента *ACB* вокруг прямой *AO*, равны.

17. Докажите, что площадь поверхности тела, полученного вращением квадрата вокруг своей стороны, равна площади поверхности шара, радиус которого равен стороне данного квадрата.

18. Около правильной треугольной призмы, у которой высота в два раза больше стороны основания, описан шар. Найдите отношение его объема к объему данной призмы.

19. В шар вписана прямая треугольная призма, стороны основания которой равны 2 дм, 2 дм и 3,2 дм. Найдите площадь поверхности шара.

20. Площадь поверхности шара равна 169 см2, а образующая вписанного в него конуса равна см. Найдите объем конуса.

**Зачет № 7. Координаты и векторы**

**Вопросы**

1. Прямоугольная система координат в пространстве (определение, названия, примеры).

2. История открытия прямоугольной системы координат.

3. Теорема о расстоянии между точками в пространстве (формулировка, доказательство).

4. Уравнение сферы с центром в точке *A*(*x*0, *y*0, *z*0) и радиусом *R* (формулировка, доказательство).

5. Понятие координат вектора (определение, примеры).

6. Теорема о разложении вектора по координатным векторам (формулировка, доказательство).

7. Теорема о координатах суммы двух векторов (формулировка, доказательство).

8. Понятие скалярного произведения векторов (определение, скалярный квадрат, примеры).

9. Теорема о выражении скалярного произведения векторов через их координаты (формулировка, доказательство).

10. Уравнение плоскости в пространстве (формулировка, доказательство).

11\*. Уравнение прямой в пространстве (формулировка, доказательство).

12. Аналитическое задание фигур в пространстве (сфера, шар, цилиндр, многогранник).

13\*. Понятие о задачах оптимизации (примеры, этапы решения).

14\*. Полярная система координат на плоскости (определение, названия, примеры).

15\*. Уравнение окружности в полярных координатах (вывод, изображение).

16\*. Уравнение спирали Архимеда в полярных координатах (вывод, изображение).

17\*. Уравнение логарифмической спирали в полярных координатах (вывод, изображение).

18\*. Уравнение трилистника в полярных координатах (вывод, изображение).

19\*. Сферические координаты в пространстве (определение, названия, примеры).

20\*. Исторические сведения об измерении Земли.

**Задачи**

1. Докажите, что точки *A*(-1, 3, 4), *B*(-2, 0, 5), *C*(1, 1, -3), *D*(2, 4, -4) являются вершинами параллелограмма. Найдите косинус угла между его диагоналями.

2. Найдите расстояние от точки *K*(1, 2, -7) до плоскости, заданной уравнением 12*x* + 4*y* + 3*z* – 4 = 0.

3. Сфера (*x – a*)2 + (*y – b*)2 + (*z – c*)2 = *R*2 проходит через начало координат. Докажите, что уравнение касательной плоскости к сфере в начале координат имеет вид *ax + by + cz* = 0.

4. Найдите косинус угла между плоскостями 2*x* + 3*y* + 6*z* – 5 = 0 и 4*x* + 4*y* + 2*z* – 7 = 0.

5. Найдите условие касания двух сфер, заданных уравнениями (*x – x*1)2 + (*y – y*1)2 + (*z – z*1)2 = *R*12; (*x – x*2)2 + (*y – y*2)2 + (*z – z*2)2 = *R*22.

6. Найдите уравнение плоскости, в которую преобразуется плоскость 8*x* – 3*y* + *z* – 1 = 0 при центральной симметрии относительно начала координат.

7. Найдите уравнение плоскости, в которую преобразуется плоскость 5*x* + 3*y* – 7*z* + 2 = 0 при осевой симметрии относительно оси аппликат.

8. Найдите уравнение плоскости, в которую преобразуется плоскость 2*x* – *y* + 11*z* – 8 = 0 при зеркальной симметрии относительно координатной плоскости *Oxy*.

9. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку *H*(1, 3, -1) параллельно плоскости 3*x* + *y* – *z* + 5 = 0.

10. Прямая задана точками *A*(6, 0, 2) и *B*(1, -3, 4). Найдите координаты точки *C*(*x*, *y*, 8), которая принадлежит прямой *AB*.

11. Найдите координаты единичного вектора , если он перпендикулярен векторам (3, 3, 0) и (0, 3, 3).

12. Найдите точку пересечения трех плоскостей 5*x* – *z* + 3 =0, 2*x* – *y* – 4*z* + 5 = 0, 3*y* + 2*z* – 1 = 0.

13. Из точки *A*(*x*0, *y*0, *z*0), лежащей вне сферы (*x – a*)2 + (*y – b*)2 + (*z – c*)2 = *R*2, проведена к ней касательная *MA*, где точка *M* – точка касания. Найдите отрезок *MA*.

14. Найдите условие того, что две сферы (*x – x*1)2 + (*y – y*1)2 + (*z – z*1)2 = *R*12 и (*x – x*2)2 + (*y – y*2)2 + (*z – z*2)2 = *R*22 касаются: а) внешним образом; б) внутренним образом.

15\*. Найдите уравнение сферы, проходящей через начало координат и точки *A*(*a*, 0, 0), *B*(0, *b*, 0), *C*(0, 0, *c*). Докажите, что прямая, проходящая через начало координат перпендикулярно плоскости *ABC*, пересекает плоскость и сферу соответственно в точках *M* и *N* таких, что *OM*:*ON =* 1:3.

16\*. Изобразите многогранник, задаваемый неравенствами:

|*x*| + |*y*| + |*z*| 6; |*x*| 1; |*y*| 2; |*z*| 3.

17\*. Найдите точку пересечения прямой, заданной системой уравнений с плоскостью 3*x* – *y* +2*z* – 5 = 0.

18\*. Изобразите спирали Архимеда, задаваемые уравнениями: *r =* ; *r =* 2.

19\*. Изобразите кривую, задаваемую уравнением *r =* sin 4.

20\*. Найдите сферические координаты вершин прямоугольного параллелепипеда, который задается системой неравенств

**§ 6. ОТВЕТЫ**

***САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ***

**2**

В1. 4. 6. В2. 3. 10. 4. 4.

**3**

В1. 2. а) В=8, Р=12, Г=6; б) В=14, Р=21, Г=9; в) В=*n*+1, Р=2*n*, Г=*n*+1. 3. а) 5-угольная; б) 7-угольная; в) 3-угольная. 4. Три цвета. В2. 2. а) В=8, Р=12, Г=6; б) В=7, Р=12, Г=7; в) В=2*n*, Р=3*n*, Г=*n*+2. 3. а) 4-угольная; б) 7-угольная; в) 8-угольная. 4. Два цвета.

**4**

В1. 3. 3. 4. 3. В2. 3. 3. 4. 3.

**6**

В1. 3. Скрещиваются. В2. 3. Нет. 4. Нет.

**7**

В1. 3. Параллельны.

**8**

В1. 2. Верны утверждения 1), 3), 4). 4. Если *AB* || *CD*, то *AC* || *BD*; если *AB* скрещивается с *CD*, то *AC* скрещивается с *BD*.В2. 2. Верно утверждение 3). 4. Если *AB* || *CD*, то *AD* и *BC* пересекаются; если *AB* и *CD* скрещиваются, то *AD* и *BC* скрещиваются.

**9**

В1. 2. 26. 3. а) ; б) ; в) , где *M* – середина *BC*. 4. а) ; б) ; в) . В2. 2. 24. 3. а) ; б) ; в) , где *M* – середина *BA*. 4. а) ; б) ; в) .

**10**

В1. 1. . 2. Вектор + одинаково направлен с вектором ; | + | = || - ||. В2. 1. . 2. Вектор + одинаково направлен с вектором ; | + |=|| - ||.

**12**

В1. 1. Одна, если прямая, проходящая через них, параллельна направлению проектирования; две в противном случае. 2. Параллельность и равенство противоположных сторон; деление диагоналей пополам в точке пересечения. 3. Прямые скрещиваются и одна из них параллельна направлению проектирования. В2. 1. Одна, если все точки принадлежат одной прямой, параллельной направлению проектирования; две, если прямая, проходящая через какие-нибудь две из данных точек, параллельна направлению проектирования, а третья точка не принадлежит этой прямой; три в остальных случаях. 2. Параллельность и равенство противоположных сторон; деление диагоналей в точке пересечения пополам. 3. Прямая не параллельна направлению проектирования и точка принадлежит прямой или плоскость, проходящая через эту точку и прямую, параллельна направлению проектирования.

**14**

В1. 3. Грани куба не параллельны плоскости проектирования и направление проектирования параллельно диагонали *BD*. 4. *S*. В2. 3. Две грани параллельны плоскости проектирования и направление проектирования перпендикулярно ей. 4. *Q*/2.

**16**

В1. 1. а), б), г) 90о; в) 45о. 2. а), б) 90о. 3. 45о. 4. 90о. В2. 1. а), в), г) 90о; б) 45о. 2. а) 90о; б) 30о. 3. cos = . 4. 90о.

**18**

В1. 1. 9 см. 3. см. 4. 3 см. В2. 1. 4 см. 2. Прямая, перпендикулярная плоскости данной окружности и проведенная через ее центр. 3. 45о. 4. 1 см.

**19**

В1. 2. cos = . В2. 2. cos = .

**20**

В1. 1. 6 см. 2. а) ; б) ; в) 1. 3. . 4. *a*. В2. 1. 13 см. 2. а) ; б) ; в) 1. 3. . 4. *a*.

**21**

В1. 1. . 2. 12 см. 3. 1:(-1). В2. 1. . 2. 26см. 3. 13 см.

**22**

В1. 3. 109 см.

**23\***

# Самостоятельная работа N 1

В1. 3. . В2. 3. .

# Самостоятельная работа N 2

В1. 4. . В2. 4. .

**24**

В1. 2. 14 см2. 3. По 6 прямым. В2. 2. . 3. По 10 прямым.

**25\***

В1. 1. а), б) В = 2*n*, Р = 3*n*, Г = *n* + 2. 3. =Г*n*, Р = , =2Р. 4. В+*m*-1, Р+*m*, Г+1. В2. 1. а), б) В = *n+*1, Р = 2*n*, Г = *n* + 1. 3. =В*m*, Р = , =2Р. 4. В+1, Р+*n*, Г+*n-*1.

**26\***

В1. 4. . В2. 4. .

**27**

В1. 1. б) Октаэдр. 2. Ромб. 3. . 4. Равнобедренный треугольник. В2. 1. б) Тетраэдр. 2. Квадрат. 3. . 4. Равнобедренный треугольник.

**28\***

В1. 1. В=24, Р=36, Г=14. 4. . В2. 1. В=24, Р=36, Г=14. 4. ; .

**29\***

## В1. 3. (-1)*a*. В2. 3. .

**30\***

В1. 2. В=14, Р=24, Г=12. 3. 21600. 4. . В2. 2. =48, Дв=24, Мн=14 (8 трехгранных и 6 четырехгранных). 3. 4320о. 4. 6*a*2(2+1).

**31**

В1. 1. 19 см2. 2. . 3. 4 см. 4. 150 см2. В2. 1. 4:3. 2. . 3. 5 см. 4. 27 см2.

**32**

В1. 3. 3 см. 4. 2*R*. В2. 3. 9 см. 4. 9 см.

**33**

В1. 1. Да. 2. 24 см2, 4,8 см. 3. . 4. 5 см. В2. 1. Высота призмы должна равняться диаметру окружности, вписанной в основание. 2. . 3. *h*(-1). 4. 13 см.

**34**

В1. 1. 24см2. 2. 6см. 4. см2. В2. 1. 8 см. 2. 24 см2. 4. ; .

**35**

В1. 4. 90о. В2. 4. 800 см2.

**36**

В1. 1. 10 см, 5см. 2. *R*. 3. 3*r*2. 4. 4*r*2. В2. 1. см, см. 2. 2*R*. 3. 4*r*2. 4. *r*2; *r*2.

**37\***

В1. 2. 4*R*. 3. 2см. 4. 2*R*. В2. 2. 60о. 3. 4 см. 4. .

**38**

В1. 1. 6 см, 2см. 2. . 3. а) Нет; б) да. 4. 6 см, 2см. В2. 1. 5см. 2. *R*. 3. а) Да; б) нет. 4. .

**39\***

В1. 1. *R* . 3. а) <450; б) =450; в) >450. 4. 2*a*. В2. 1. . 3. а) <600; б) =600; в) >600. 4. .

**40**

В1. 4. Одна ось симметрии третьего порядка; Три оси симметрии; Четыре плоскости симметрии. В2. Одна ось симметрии 6-го порядка; Шесть плоскостей симметрии.

**41**

В1. 4. Параллельным переносом. В2. 4. Параллельным переносом.

**42\***

В1. 1. а), б), в) Две. 3. 2*ab*. 4. Да. В2. 1. а), б) Две; в) одну. 3. 2*b*. 4. Да.

**43**

В1. 1. 27 см3. 2. . 3. *m*:*n*. 4. 360 дм3. В2. 1. см3. 2. *V*. 3. 1:3. 4. 8,4 дм3.

**44**

В1. 1. Да. 2. *S*. 3. . 4. . В2. 1. Да. 2. *R*2*b*. 3. 60 см3. 4. .

**45**

В1. 1. . 2. . 3. см3. 4. . В2. 1. . 2. 6 см3. 3. см3. 4. .

**46**

В1. 1. 72 см3. 2. . 3. 0,243*V*. 4. (*a*3-*b*3). В2. 1. 9 см3. 2. 125:18. 4. 37:61.

**47**

В1. 1. :2. 2. :9. 3. 45 см3, 243см3. 4. R3. В2. 1. :1. 2. :6. 3. 2904 см3. 4. 112,5 дм3.

**48**

В1. 1. 3*a*2; 3,5*a*2. 2. *a*2(+2). 3. *b*2 tg . 4. 9*Q*. В2. 1. 4*a*2; 2*a*2(2+1). 2. *h*2(+2). 3. . 4. 4,5*Q*.

**49**

В1. 2. . 3. 275 см2. 4. *R*2. В2. 2. 1:2. 3. 50 см2 и 2450 см2. 4. 7*h*2.

**50**

В1. 2. а) *M*; б) *P*; в) *K, L, M, N*; г) *M, P, Q*. 3. а) (6, 0, 0), (-3, 0, 0); б) (6, 0, 8), (-3, 0, -5). 4. (3, -1, 1). 5. а) (-8, 0, 6), (-20, -14, 0); б) (8, 0, -6), (20, 14, 0). В2. 2. а) *C*; б) *A*; в) *A, B, D, F*; г) *C, D, E*. 3. а) (0, 0, -6), (0, 0, 8); б) (9, -1, 0), (-12, 5, 0). 4. (4, 0, -1). 5. а) (0, 0, -5), (0, -1, 2); б) (0, 0, -5), (0, -1, 2).

**51**

В1. 1. Нет. 2. (0, 0, ). 3. а) (*x+*2)2 + *y*2 + (*z* – 3)2 = 3; б) (*x+*2)2 + *y*2 + (*z* – 3)2 = 25. 4. (3, -4, 0), 5. 5. (0, 1, 0), 1. В2. 1. Нет. 2. (0, -2, 0). 3. а) *x*2 + (*y* + 5)2 + (*z* – 6)2 = 100; б) *x*2 + (*y* + 5)2 + (*z* – 6)2 = 9. 4. (0, 0, 4), 6. 5. (-1, 0, 0), 1.

**52**

В1. 1. а) (2, 3, -4); б) (-5, 0, 10); в) (0, -1, ). 2. а) 2; б) ; в) 10. 3. а) (5, -7, 6); б) (-8, , 6). 4. *x =*-2,4; *y* = 0,4; *z* = -1,4. В2. 1. а) (3, -4, 2); б) (-2, 0, 1); в) (0, 1, - ). 2. а) ; б) ; в) . 3. а) (5, 2, -11); б) (3, 4 , -15). 4. *u =* 3; *v* = -4,5; *w* = 1,5.

**53**

В1. 1. а) > 0; б) < 0. 2. а), б) 90о. 4. а) ; б) -; в) -. В2. 1. а) 90о < <180о; б)0о < < 90о. 2. а), б) 90о. 4. а) *a*2; б) *a*2; в) -*a*2.

**54**

В1. 1. *x* – *y* + 3*z* – 18 = 0. 2. а) (, 0, 0); б) (0, -1, 0). 3. а), б) *x* – 3 = 0. 4. 5*x* + *y* + 2*z* - 30 = 0. В2. 1. 6*y* – 10*z* + 6 = 0. 2. а) (0, , 0); б) (0, 0, -). 3. а), б) *y* + 4 =0. 4. 3*x* - *y* + 6*z* - 29 = 0.

**55\***

В1. 1. *d* = 3. 2. а) *a*1 = *a*2 = 0; б) *a*1:*a*2 = *c*1:*c*2 = *d*1:*d*2; в) *b*1:*b*2 = *d*1:*d*2. 3. (-1, 7, 0); (2, 0, 3); (0, 5, 1). 4. В2. 1. *b* = -6, *d* = -27. 2. а) *c*1 = *c*2 = *d*1 = *d*2 = 0; б) *b*1:*b*2 = *c*1:*c*2; в) *d*1 = *d*2 = 0. 3. (6,-5,0); (3, 0, 7); (0, 7, 18). 4.

**56**

В1. 1. а) Сфера с центром в точке *O*(0, 0, 0) и радиусом 1; б) две параллельные плоскости; в) три координатные плоскости. 2. а) Прямоугольный параллелепипед; б) окружность. 3. Для : точки *A, B, C*; для : точка *B*. 4. а) Да; б) нет. В2. 1. а) Сфера с центром в точке (0,0,-1) и радиусом 1; б) две пересекающиеся плоскости; в) плоскость *Oyz*. 2. а) Прямоугольный параллелепипед; б) две пересекающиеся прямые, лежащие в плоскости *Oxy*. 3. Для : точка *F*; для : точки *E, F, G.* 4. а) Да; б) нет.

**57\***

В1. 1.

2. а) Внутренняя область тетраэдра с вершинами (0, 0, 0), (1, 0, 0). (0, 1, 0), (0, 0, 1); б) внутренняя область прямоугольного параллелепипеда с вершинами (5, 5, 0), (5, 3, 0), (7, 3, 0), (7, 5, 0), (5, 5, 10), (5, 3, 10), (7, 3, 10), (7, 5, 10).

3. *V =* 20. 4. 8 – наибольшее; 3 – наименьшее.

В2. 1. Точки *N* и *H*. 2. а) Область между двумя параллельными плоскостями; б) внутренняя область прямой треугольной призмы с вершинами (0, 0, 0), (0, 3, 0). (0, 0, 3), (-2, 0, 0), (-2, 3, 0), (-2, 0, 3).

3. *V =* 45. 4. 5 – наибольшее; - 4 – наименьшее.

**58\***

В1. 2. *G*(1, ), *H*(-1, 1), *P*(0, 5), *Q*(, -). 3. (0, 0), (1, 0), (, ), (1, ), (, ). 4. а) *M’*(1, -), *N’*(3, -), *P’*(, ), *Q’*(, -); б) *M”*(1, ), *N”*(3, -), *P”*(, ), *Q”*(, +). В2. 2. *K*(6, ), *L*(2, ), *M*(, ), *N*(2, ). 3. (0, 0); (1, 0); (, ); (2, ); (, ); (1,). 4. а) *G’*(2, ), *H’*(3, ), *R’*(3,), *S’*(, +); б) *G”*(2, -), *H”*(3, -), *R”*(3, ), *S”*( , -).

**59\***

В1. 1. (, ,); (0, , 1); (0, 0, 1). 2. (2, 45о, 45о); (, 45о, 00); (1, 90о, ). 3. а) Окружность; б) полуокружность; 4. а) Шар радиуса 2; б) полушар, радиуса 1. В2. 1. (,, -); (0, -, 1); (0, 0, -3). 2. (4, 45о, 45о); (, 45о, 180о); (-1, -90о, ). 3. а) Окружность; б) полуокружность; 4. а) Точки, лежащие вне шара радиуса 1; б) полушар, радиуса 1.

**60\***

В1. 3. Применить операцию Stellate. В2. 3. Применить операцию Stellate.

***КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ***

**10 класс**

**1**

В1. 1. Да. 2. а) *BC*; б) *EF*. 4. 4. 5\*. 10. В2. 1. Да. 2. а) *BC*; б) *AF*. 4. 6. 5\*. 10.

**2**

В1. 1. Прямая *c* может быть параллельна прямым *a* и *b*; может пересекать каждую из прямых *a* и *b*; может скрещиваться с каждой из них. 3. а) Параллельны или скрещиваются с *b*; б) пересекаются, параллельны или скрещиваются с *b*; в) пересекаются или скрещиваются с *b*. 4. *SA*2 = 15 см; *SB*2 = 18 см; *A*1*C*1 = 4 см. 5\*. а) 10; б) 15. В2. 1. Прямая *a* может пересекать прямые *m* и *n* в точке их пересечения или в различных точках данных прямых; может пересекать одну из них и быть параллельной другой; может скрещиваться с каждой из них. 3. а) *c* пересекается или скрещивается с *a*; б), в) пересекается, параллельна или скрещивается с *a*. 4. *BC =* . 5\*. а) 10; б) 15.

**3**

В1. 1. а) ; б) ; в) . 3. *a*(2+). В2. 1. а) ; б) ; в) . 3. .

**4**

В1. 1. 90о. 2. Прямоугольные. 3. Угол *KLM* – тупой. В2. 1. 90о. 2. Треугольник *DEK* тупоугольный, остальные прямоугольные. 3. Угол *H* или угол *P* – прямой.

**5**

В1. 1. 30о. 2. 1 см. 3. . 4. 40о. В2. 1. 60о. 2. . 3. . 4. 105о.

**6**

В1. 1. а) Да; б) нет. 2. 450. 4. . В2. 1. а) Да; б) нет. 2. 90о. 4. .

**11 класс**

**1**

В1. 1. 64 см2. 2. . 3. . 4. Боковое ребро такой призмы равно 4,8 см; радиус равен 2,4 см. В2. 1. 17 см. 2. . 3. 1,5 дм. 4. Высота такой призмы равна 6 см; радиус равен 3 см. 5\*. В центре основания пирамиды.

**2**

В1. 2. 6 см. 3. *R*, 2*R*. 4. а) 3; б) 3. 5\*. 14 см. В2. 2. 25 см. 3. см. 4. а) 3; б) 3. 5\*. 30о.

**3**

В1. 1. см3. 2. 48дм3. 3. . 4. 100 см3. 5\*. . В2. 1. см3. 2. 360 дм3. 3. 48 см3. 4. . 5\*. .

**4**

В1. 1. 1:4. 2. . 3. 20 см2. 4. 8дм2. 5\*. 32 см2. В2. 1. . 2. . 3. дм2. 4. 8см2. 5\*. 117 см2.

**5**

В1. 1. а) 1; б) ; в) . 2. а) (5,-6,2); б) (-2, 3, -1); в) (25, -30, 10). 3. . 4. 2*x* – *y* – *z* – 13 = 0. 5\*. (1,9,-11). В2. 1. а) ; б) 3; в) . 2. а) (6, 2, -1); б) (-3, -1, - ); в) (12, -4, 2). 3. cos = -. 4. 10*x* – 13*y* +4*z* + 60 = 0. 5\*. .

**10 класс**

**Углублённый уровень**

**1**

В1. 4. а) 5; б) 10. 5\*. . В2. 4. а) 9; б) 18. 5\*. *a*.

**3**

В1. 2. 90. 3. 9 см. 4. см. 5\*. 105. В2. 2. 90. 3. 5см. 4. 6 см. 5\*. 45.

**4**

В1. 1. 2,5 см. 2. = В*m*, Р = В*m*, Г = 2 – В +В*m*. 3. В’ = В + 1, Р’ = Р + *n*, Г’ = Г + *n* – 1. 4. . В2. 1. 3 см. 2. = Г*n*, Р = Г*n*, В = 2 – Г +Г*n*. 3. В’ = В + *m* – 1, Р’ = Р + *m*, Г’ = Г + 1. 4. . 5\*. Нет.

**5**

В1. 1. 64 см2. 2. . 3. *a*. 4. 4,8 см, 2,4 см. В2. 1. 17 см. 2. . 3. 1,5 дм. 4. 6 см, 3 см. 5\*. В центре основания пирамиды.

**6**

В1. 2. 6 см. 3. *R*, 2*R*. 4. а) Три оси, проходящие через центры противоположных граней; б) три плоскости, проходящие через середины параллельных ребер. 5\*. 14 см. В2. 2. 25 см. 3. 5см. 4. а) Три оси (одна проходит через центры оснований, две другие – через середины противоположных боковых ребер); б) три плоскости, каждая из которых проходит через две из трех осей симметрии. 5\*. 30.

**11 класс**

**Углублённый уровень**

**1**

В1. 1. а) , 4; б) 0,8, 2. а) Конус; б) цилиндр. 3. 45 см3. 4. 360 см3. 5\*. *a*3. В2. 1. а) *F*(0;2); б) *y* = -2. 2. а) Цилиндр; б) конус. 3. 21 см3. 4. 8,4 дм3. 5\*. 2*a*3.

**2**

В1. 1. 180 см3. 2. . 3. 100 см3. 4. 63 см3. 5\*. 24см3. В2. 1. 49 см3. 2. 48 см3. 3. . 4. 14 см3. 5\*. 450 см3.

**3**

В1. 1. 1333см3. 2. 20 см2. 3. . 4. 9,6 см3, 16,8 см2. 5\*. 2450 см2, 50 см2. В2. 1. 166 см3. 2. 750 см2. 3. 4*a*2. 4. 480 см3, 420 см2. 5\*. 275 см2.

**4**

В1. 1. а) (1,-2,3); б) (,1,-); в) (-3,-8,9). 2. (8,0,0). 3. (13,-1,-3). 4. а) ; б) . В2. 1. а) (1,,); б) (9,5,4); в) (-1,-2,-4). 2. (0,0,). 3. *E*(-7,7,-15). 4. а) ; б) .

**5**

В1. 1. 1, cos = . 2. -1. 3. а) *z* + 2 = 0; б) *y* + 3 = 0. 4. cos = . 5\*. (1,9,-11). В2. 1. –6, cos = -. 2. -1. 3. а) *y* – 4 = 0; б) *x* + 3 = 0. 4. cos = . 5\*. .

**6**

В1. 3. а) (, 0, ); б) (-, 0, -). 4. а) (2, -45, 45); б) (2, 60, 0). В2. 3. а) (3, -135, -60); б) (2, 30, -120). 4. а) (0, -2, -); б) (, -, -).

**10-11 классы**

**Базовый уровень**

**1**

В1. 2. Да. 4. 10 см. В2. 2. Да. 4. 8 см.

**2**

В1. 2. Да. 3. а) 4см; б) 8 см. 4. 25 см. В2. 2. Нет. 3. а) 4см; б) 4см. 4. 12 см.

**3**

В1. 1. 5*a*2. 2. а) 2см; б) 240 см2. 3. *a*. 4\*. 2*a*tg . В2. 1. 2*a*2. 2. а) 4см; б) 120см2. 3. *a*. 4\*. *a*tg .

**4**

В1. 1.см, 81 см2. 2. 2*Rh*sin. 3. Одна ось симметрии 4-го порядка, четыре плоскости симметрии. 4\*. Сумма радиусов оснований равна удвоенной образующей. В2. 1. 16 см, 192 см2. 2. . 3. Одна ось симметрии 6-го порядка, шесть плоскостей симметрии. 4\*. Биссектральные плоскости двугранных углов, образованные соседними боковыми гранями, пересекаются по одной прямой.

**5**

В1. 1. а) 1200 см3; б) 26 см. 2. 72 см3, 72 см2. 3. а) *a*3tg; б) *a*2. 4\*. а) *h*3tg; б) 2*h*2tg. В2. 1. а) 364см3; б) 8см2. 2. 576 см3, 288 см2. 3. а) 2*a*3sin (1+cos2); б) 4*a*2sin. 4\*. а) см3; б) см2.

**6**

В1. 1. а) ; б) ; в) ; г) . 2. cos = . 3. (0, 6, 3). 4. 5*y* – *z* = 0. 5\*. 25. В2. 1. а) (10, -5, 20); б) (3, -3, 14); в) (19, -2, 2). 2. 90. 3. (-7, 2, 0). 4. *x* + 2*y* = 0. 5\*. 4.

**ТЕСТЫ**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  задания | Номер теста | | | | | | | |
| 1 | 2 | | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 4) | 3) | 3) | | 4) | 4) | 2) | 1) |
| 2 | 4) | 3) | 4) | | 3) | 3) | 1) | 2) |
| 3 | 2) | 4) | 2) | | 3) | 4) | 1) | 4) |
| 4 | 4) | 1) | 4) | | 3) | 2) | 3) | 3) |
| 5 | 2) | 1) | 4) | | 3) | 3) | 4) | 3) |
| 6 | 2) | 2) | 2) | | 2) | 3) | 4) | 3) |
| 7 | 4) | 3) | 4) | | 2) | 1) | 4) | 4) |
| 8 | 4) | 2) | 4) | | 2) | 2) | 3) | 2) |
| 9 | 3) | 3) | 3) | | 1) | 4) | 3) | 3) |
| 10 | 1) | 4) | 1) | | 4) | 3) | 3) | 4) |
| 11 | 3) | 1) | 2) | | 2) | 2) | 3) | 3) |
| 12 | 2) | 2) | 3) | | 3) | 1) | 2) | 1) |
| 13 | 2) | 3) | 4) | | 4) | 4) | 4) | 3) |
| 14 | 4) | 4) | 3) | | 3) | 2) | 3) | 4) |
| 15 | 3) | 4) | 3) | | 2) | 1) | 2) | 4) |
| 16 | 3) | 2) | 2) | | 2) | 4) | 3) | 3) |
| 17 | 3) | 4) | 4) | | 2) | 2) | 2) | 4) |
| 18 | 4) | 3) | 2) | | 4) | 3) | 2) | 2) |
| 19 | 2) | 4) | 3) | | 1) | 3) | 2) | 2) |
| 20 | 1) | 2) | 1) | | 4) | 2) | 3) | 4) |

### **С О Д Е Р Ж А Н И Е**

С.

Предисловие……………………………………………………. 2

§1. Математические диктанты……………………………… 4

§2. Самостоятельные работы………………………………… 34

§3. Контрольные работы……………………………………..... 79

§4. Тесты………………………………………………………. 104

§5. Зачеты …………………………………………………… 126

§6. Ответы…………………………………………………….. 144