ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

ПРЕДЛАГАЕТ УЧЕБНУЮ И МЕТОДИЧЕСКУЮ ЛИТЕРАТУРУ ПО ГЕОМЕТРИИ

УМК для 7—9 классов

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Учебник**. 7—9 кл.

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Рабочая тетрадь**. 7, 8, 9 кл.

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Дидактические материалы**. 7, 8, 9 кл.

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Многоугольники. Курс по выбору. **Учебное пособие**. 9 кл.

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Кривые. Курс по выбору. **Учебное пособие**. 9 кл.

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Методические рекомендации для учителя**. 7, 8, 9 кл.

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. Нестандартные и исследовательские задачи. **Учебное пособие**. 7—11 кл.

УМК для 10—11 классов

Базовый и профильный уровни

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Учебник**. 10—11 кл.

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Рабочая тетрадь**. 10, 11 кл.

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Дидактические материалы**. 10—11 кл.

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Многогранники. Элективный курс. **Учебное пособие**. 10—11 кл.

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Изображение пространственных фигур. Элективный курс. **Учебное пособие**. 10—11 кл.

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Методические рекомендации для учителя** (в 2-х частях). 10—11 кл.

Базовый уровень

И. М. Смирнова. Геометрия. **Учебник**. 10—11 кл.

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Дидактические материалы**. 10—11 кл.

И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. Геометрия. **Методические рекомендации для учителя**. 10—11 кл.

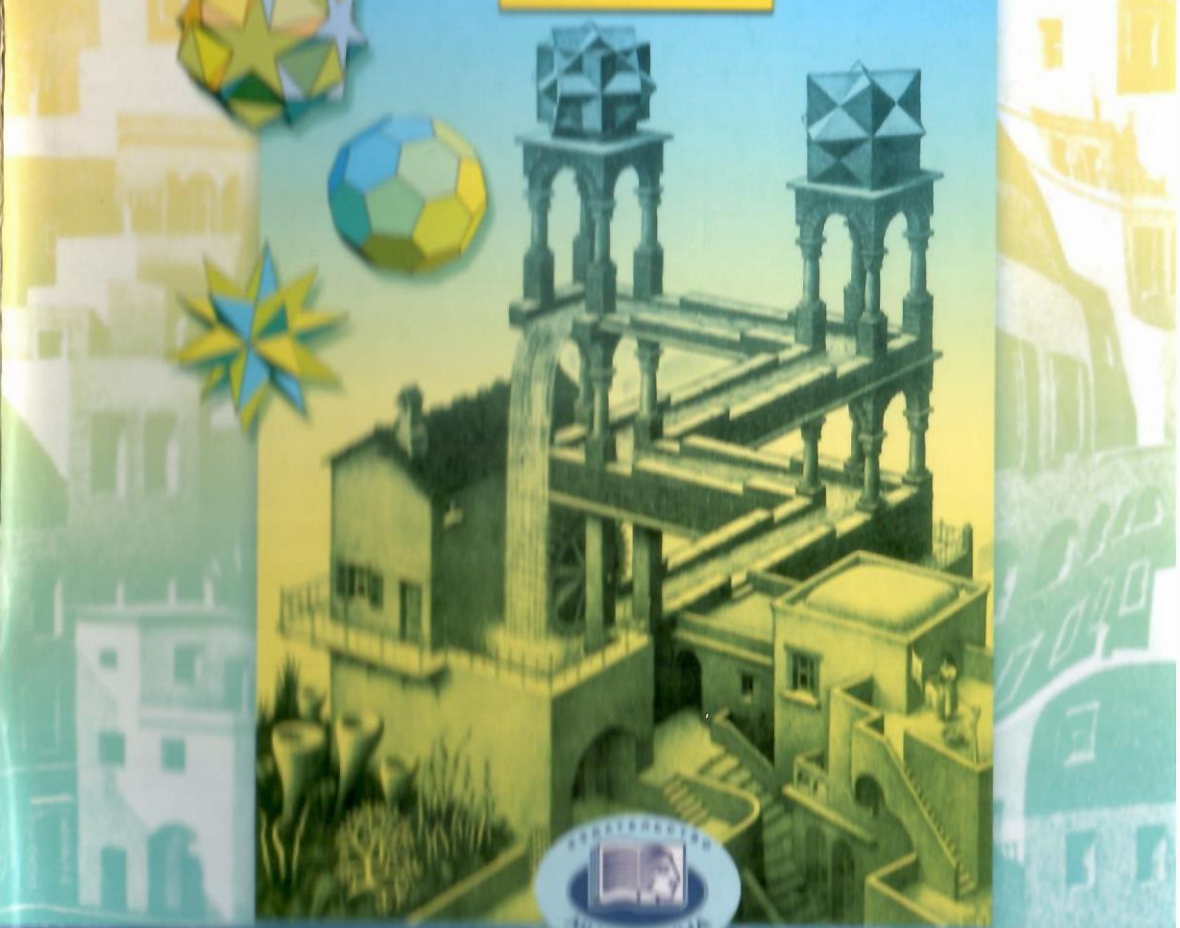
ISBN 5-346-00614-1
9 785346 006145

И. М. СМИРНОВА, В. А. СМИРНОВ

МНОГОГРАННИКИ

ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС

10–11 КЛАССЫ



ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

К 373.167.1:514
К 22.151.0я721
С50

Смирнова И. М.
С50 Многогранники. Элективный курс. 10—11 классы : учеб. пособие для общеобразоват. учреждений. / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. — М. : Мнемозина, 2007. — 95 с. : ил.
ISBN 5-346-00614-1

В предлагаемом курсе рассматриваются свойства многогранников, изучение которых выходит за рамки школьной программы, расширяются и углубляются геометрические представления учащихся.

Показаны возможности использования графического редактора «Adobe Illustrator» для изображения многогранников и решения задач.

Помимо теоретического материала, каждый пункт настоящего пособия содержит задачи для самостоятельной работы учеников.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151.0я721

ISBN 5-346-00614-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс, предлагаемый вашему вниманию, посвящен увлекательному разделу геометрии — теории многогранников.

Чем же так привлекательны многогранники?

С одной стороны, они имеют тысячелетнюю историю. Первые упоминания о многогранниках встречаются у египтян и вавилонян за 3000 лет до нашей эры. В то же время теория многогранников — современный раздел математики. Глубокие результаты в ней получены отечественными математиками, академиками: Б. Н. Делоне, А. Д. Александровым, А. В. Погореловым и др.

Теория многогранников тесно связана со многими другими разделами современной математики: топологией, теорией графов. Она имеет большое значение не только для теоретических исследований по геометрии, но и для областей прикладной математики — линейного программирования, теории оптимального управления и др.

Многогранники интересны и сами по себе. Они имеют красивые формы, например правильные, полуправильные и звездчатые многогранники. Они обладают богатой историей, связанной с такими знаменитыми учеными древности, как Пифагор, Евклид, Архимед и др.

В природе форму многогранников имеют кристаллы. Свойства кристаллов определяются особенностями их геометрического строения, в частности симметричным расположением атомов в кристаллической решетке.

Формы многогранников используются в архитектурных проектах. Эта традиция ведет отсчет с глубокой древности. Пирамида — это норма тектоники — внутреннего устройства каменных зданий прошлого. Силуэты каменных церквей и соборов, как правило, вписываются в форму пирамиды.

«Только неотступно следуя законам геометрии, архитекторы древности могли создать свои шедевры. Не случайно говорят, что пирамида Хеопса — немой трактат по геометрии, а греческая архитектура — внешнее выражение геометрии Евклида. Прошли века, но роль геометрии не изменилась. Она по-прежнему остается грамматикой архитектора», — это высказывание принадлежит великому французскому архитектору прошлого столетия Ле Корбюзье (1887—1965).

Материал настоящего курса разбит на пункты, соответствующие двухчасовым занятиям. В каждом из них, помимо теории, предлагаются упражнения для самостоятельного решения, в том числе повышенной трудности (со знаком *). В конце даются ответы и приводится список дополнительной литературы, посвященной многогранникам.

ПРОГРАММА КУРСА

(Всего 34 ч)

Пункт	Содержание	Кол-во часов
1	С чего все начиналось	2
2	Что такое многогранник	2
3	Многогранные углы	2
4	Тетраэдр	2
5	Выпуклые многогранники	2
6	Сечения многогранников	2
7	Теорема Эйлера	2
8	Правильные многогранники	2
9	Каскады из правильных многогранников	2
10	Полуправильные многогранники	2
11	Звездчатые многогранники	2
12	Моделирование многогранников	2
13	Кристаллы — природные многогранники	2
14	Аналитическое задание многогранников	2
15	Многогранники и оптимальное управление	2
16	Изображение многогранников в компьютерной системе «Математика»	2
17	Использование компьютерной системы «Maple» для изображения многогранников	2

1. С ЧЕГО ВСЕ НАЧИНАЛОСЬ

Вы, наверное, знаете, что геометрия как теоретическая наука стала складываться в Древней Греции в период с VII по III век до нашей эры. До этого геометрия служила практическим целям и состояла из отдельных разрозненных фактов.

Так, например, многогранники были известны еще в Древнем Египте и Вавилоне. Достаточно вспомнить знаменитые египетские пирамиды и самую известную из них — пирамиду Хеопса. Это правильная пирамида, в основании которой квадрат со стороной 233 м и высота которой 146,5 м. Над ее сооружением трудились ежедневно около 100 000 человек в течение 20 лет.

Источником наших сведений о египетской математике являются два папируса. Один из них так называемый Московский содержит формулу для вычисления объема правильной усеченной пирамиды. После перевода на современный математический язык она принимает следующий вид:

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2),$$

где h — высота, a и b — стороны верхнего и нижнего оснований правильной усеченной пирамиды.

В Древней Греции основную роль в развитии геометрии сыграли так называемые философские школы, самыми известными из которых были школы Фалеса, Пифагора, Платона, Александрийская и др.

Фалес (635—548 годы до нашей эры) из Милета определил высоту предмета по его тени. Он измерил высоту пирамиды, наблюдая тень пирамиды в тот момент, когда тень от вертикально поставленной палки равнялась ее высоте. При этом он считал, что отношение высоты палки к длине ее тени равно отношению высоты пирамиды к длине ее тени. Соответствующую теорему о пропорциональных отрезках, отсекаемых на сторонах угла параллельными прямыми, называют теоремой Фалеса.

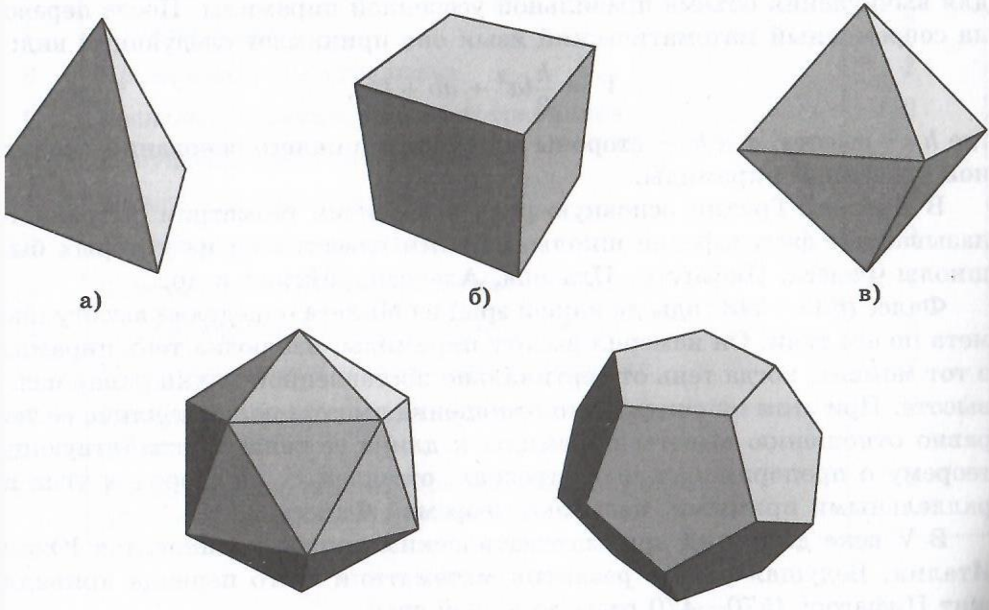
В V веке до нашей эры математическим центром становится Южная Италия. Ведущая роль в развитии математики этого периода принадлежит Пифагору (570—470 годы до нашей эры).

Пифагорейцы (ученики школы Пифагора) занимались изучением правильных многогранников. Именно школе Пифагора приписывают

:рытие существования пяти типов правильных многогранников. Эти огогранники использовались для обоснования философских космологи-:ких теорий, согласно которым элементы первоосновы бытия имели рму правильных многогранников, а именно: огонь — тетраэдр (его грами являются четыре правильных треугольника, рис. 1, а); земля — саэдр (куб — многогранник, гранями которого являются шесть квадра-, рис. 1, б); воздух — октаэдр (его гранями являются восемь правиль-х треугольников, рис. 1, в); вода — икосаэдр (его гранями являются дцать правильных треугольников, рис. 1, г); вся Вселенная, по мне-ю древних, имела форму додекаэдра (его гранями являются двенадцать авильных пятиугольников, рис. 1, д).

Названия правильных многогранников тоже имеют древнегреческое оисхождение. В переводе с греческого: «Тетра» — четыре; «Гекса» — сть; «Окто» — восемь; «Икоси» — двадцать, «Додека» — двенадцать. дра» — грань.

Другой знаменитой философской школой была школа Платона (V— века до нашей эры). Ее основатель — Платон — не был математиком, в многочисленных своих произведениях любил говорить о матема-ке. В частности в трактате «Тимей», он изложил учение пифагорейцев



а) б) в) г) д)

Рис. 16

о правильных многогранниках, которые именно поэтому впоследствии стали называться телами Платона.

Более поздняя философская школа — Александрийская — интересна тем, что дала миру знаменитого ученого Евклида, который жил около 300 года до нашей эры. К сожалению, о жизни его мало известно. В одном из своих сочинений математик Папп (III век нашей эры) изображает Евклида как человека исключительно честного, тихого и скромного, которому были чужды гордость и эгоизм.

В одном из рассказов об Евклиде говорится: «Царь Птоломей спросил у Евклида, нельзя ли найти более короткий и менее утомительный путь к изучению геометрии, чем его "Начала". Евклид на это ответил: "В геометрии нет царского пути"».

Славу Евклиду создали его «Начала», в которых впервые было дано научное изложение геометрии и представлено ее стройное аксиоматическое строение.

«Начала» состоят из 13 книг. Из них книги I—VI посвящены планиметрии, книги VII—IX — арифметике, книга X — несоизмеримым величинам, книги XI—XIII — стереометрии. Теории правильных многогранников целиком посвящена книга XIII. Согласно одной из версий, Евклид написал первые двенадцать книг для того, чтобы читатель понял написанную в XIII книге теорию правильных многогранников, которую историки математики назвали «венцом "Начал"». Здесь установлено существование пяти типов правильных многогранников путем их построения и показано, что других правильных многогранников не существует.

«Начала» Евклида имеют огромное историческое значение. Переведенные на все языки, они почти до конца XVIII столетия оставались источником геометрических знаний, единственным учебником, по которому изучали геометрию в университетах и школах.

Кроме Евклида, величайшим ученым эпохи эллинизма был Архимед (287—212 годы до нашей эры), живший в Сиракузах и являвшийся советником царя Герона. Ему принадлежат теоремы о площадях плоских фигур, объемах тел. В работе «Измерение круга» он нашел приближенное выражение для длины окружности через вписанные и описанные правильные многоугольники. В книге «О шаре и цилиндре» он вычислил объем шара и площадь поверхности сферы.

Вслед за Евклидом Архимед занимался изучением правильных многогранников. Убедившись в том, что существует только пять правильных многогранников, Архимед стал строить многогранники, у которых гранями являются правильные, но не одноименные многоугольники, а в каждой вершине, как и у правильных многогранников, сходится одно и то же число іер. Получились так называемые полуправильные многогранники. До нас шла работа «О многогранниках», в которой Архимед подробно описал тринадцать таких многогранников, получивших название тел Архимеда.

Основной чертой творчества Архимеда было единство теории и практи-, что делает изучение его трудов интересным для ученых различных :правлений исследований. Широко известна теорема Архимеда о потере :а телами, погруженными в жидкость. В современных школьных учебках она называется законом Архимеда. Среди инженерных изобретений іного известны катапульта, Архимедов винт.

Техническое искусство Архимеда использовалось при защите Сиракуз от урмовавших их римлян. В этом неравном сражении Архимед и был убит.

Архимед, по выражению современников, был околдован геометрией, хотя у него было много прекрасных открытий, он просил на своей моле начертить цилиндр с вписанным в него шаром и указать соотноше-е между их объемами. Позже, именно по памятнику с этим изображе-ем, и была найдена могила ученого.

В эпоху Возрождения большой интерес к формам правильных многоанников проявили скульпторы, архитекторы, художники. Леонардо да нчи (1452—1519), например, увлекался теорией многогранников и часто изображал их на своих полотнах. Например, он проиллюстрировал изображениями правильных и полуправильных многогранников книгу своего друга монаха Луки Пачоли (1445—1514) «О божественной пропорции».

Рис. 2

Другим знаменитым художником эпохи Возрождения, также увлекавшимся геометрией, был Альбрехт Дюрер (1471—1528). В его известной гравюре «Меланхолия» (рис. 2) изображен додекаэдр. В 1525 году Дюрер написал трактат, в котором представил пять правильных многогранников, поверхности которых служат хорошими моделями перспективы.

Учение о правильных многогранниках использовал в своих трудах Иоган Кеплер (1571—1630). Еще

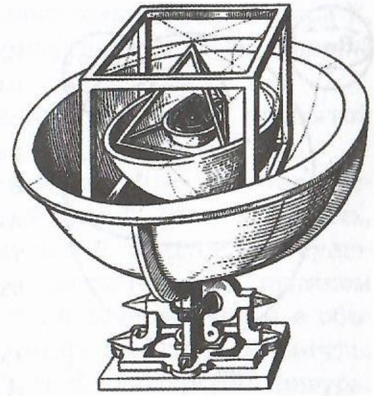


Рис. 3

в молодые годы им овладела идея поиска симметрии или гармонии мира. В своей работе 1597 г. Кеплер, опираясь на геометрию, вывел законы движения планет Солнечной системы. Название этой работы, как было принято в те времена, было довольно длинно: «Предвестник космографических исследований, содержащих тайну мироздания относительно чудесных пропорций между небесными кругами и истинных причин числа и размеров небесных сфер, а также периодических движений, изложенных с помощью пяти правильных тел Иоганом Кеплером из Вюртемберга, математиком достославной провинции Штирии».

Геометрия Солнечной системы, по Кеплеру, заключалась в следующем построении: «Земля (имеется в виду орбита Земли) есть мера всех орбит. Вокруг нее опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг куба сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли впишем икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры впишем октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия». Такая модель Солнечной системы получила название «Космического кубка» Кеплера (рис. 3).

Прошли века, но роль геометрии и в том числе многогранников не изменилась. В последние столетия в геометрии появились новые методы, позволившие переводить геометрические задачи на язык алгебры и наоборот. Возникли и развиваются новые направления геометрических исследований: геометрия Лобачевского, проективная геометрия, топология, компьютерная геометрия и др. Геометрические методы широко используются в других науках, например теории относительности, квантовой механике, кристаллографии и др.

2. ЧТО ТАКОЕ МНОГОГРАННИК

В школьных учебниках геометрии ***многогранниками*** называются тела, поверхности которых состоят из конечного числа многоугольников, называемых гранями многогранника. Стороны и вершины этих многоугольников называются соответственно ***ребрами*** и ***вершинами*** многогранника.

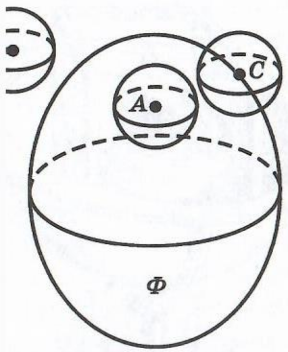


Рис. 4

При этом понятия тела и его поверхности нуждаются в уточнении. Хотя они имеют наглядный смысл, их строгое определение довольно сложно и использует начальные понятия такого раздела математики, как топология. К ним относятся: внутренняя, внешняя и граничная точки, внутренность, граница, открытость, замкнутость, связность, ограниченность. Рассмотрим эти понятия и их свойства более подробно.

Точка A называется ***внутренней точкой*** фигуры Φ, если существует шар с центром в точке A, целиком содержащийся в фигуре Φ (рис. 4).

Точка B называется ***внешней точкой*** фигуры Φ, если существует шар с нтром в точке B, не содержащий точек фигуры Φ (рис. 4).

Точка C называется ***граничной точкой*** фигуры Φ, если она не является : внутренней, ни внешней точкой этой фигуры, т. е. в любом шаре с цен- ом в точке C имеются как точки фигуры Φ, так и точки, не принадле- ащие фигуре Φ (рис. 4).

Итак, для любой точки по отношению к фигуре Φ есть только три воз- эжности: быть внутренней, внешней или граничной точкой.

Внутренностью фигуры Φ называется фигура, состоящая из всех ее утренних точек. Будем обозначать ее *вн*(Φ). Ясно, что фигура *вн*(Φ) держится в фигуре Φ.

Фигура Φ называется ***открытой***, если она совпадает со своей внутрен- остью, т. е. Φ = *вн*(Φ). Таким образом, у открытой фигуры все точки яв- іются внутренними.

В качестве примера рассмотрим фигуру, состоящую из всех точек, уда- інных от данной точки O на расстояние, меньшее R. Обозначим ее $U(O, R)$ докажем, что она является открытой. Для этого нужно доказать, что іждая ее точка является внутренней.

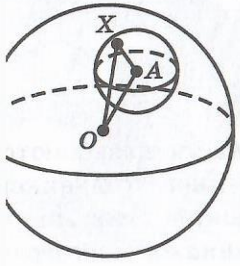


Рис. 5

Пусть A — произвольная точка фигуры $U(O, R)$ (рис. 5). Обозначим через d расстояние от A до O и рассмотрим шар V с центром в точке A и радиусом $r = \frac{1}{2}(R - d)$. Если точка X принадлежит этому шару, то расстояние от нее до A меньше или равно r и, следовательно, меньше $R - d$. В силу неравенства треугольника, расстояние от X до O меньше или равно сумме расстояний от X до A и от A до O, т. е. меньше, чем $R - d + d = R$. Это означает, что точка X

принадлежит фигуре $U(O, R)$. Поскольку X — произвольная точка шара V, то V содержится в $U(O, R)$. Следовательно, A — внутренняя точка фигуры $U(O, R)$. Что и требовалось доказать.

<u>С в о й с т в о 1.</u> Объединение двух открытых фигур является открытой фигурой.

Доказательство. Пусть Φ_1 и Φ_2 — открытые фигуры, Φ — их объединение. Если A принадлежит Φ, то она принадлежит или Φ_1, или Φ_2. Пусть, например, A принадлежит Φ_1. Из открытости фигуры Φ_1 следует, что существует шар с центром в этой точке и радиусом R_1 соответственно, целиком содержащийся в фигуре Φ_1. Но тогда этот шар будет содержаться и в объединении Φ и, следовательно, точка A является внутренней точкой фигуры Φ. Поскольку A — произвольная точка фигуры Φ, то Φ — открытая фигура.

<u>С в о й с т в о 2.</u> Пересечение двух открытых фигур является открытой фигурой.

Доказательство. Пусть Φ_1 и Φ_2 — открытые фигуры, Φ — их пересечение. Если A принадлежит Φ, то она принадлежит как Φ_1, так и Φ_2. Из открытости этих фигур следует, что существуют шары с центром в этой точке и радиусами R_1 и R_2 соответственно, целиком содержащиеся в этих фигурах. Обозначим через R наименьший из этих радиусов. Тогда шар с центром в точке A и радиусом R будет содержаться как в фигуре Φ_1, так и в фигуре Φ_2. Значит, он будет содержаться в пересечении Φ и, следовательно, точка A является внутренней точкой фигуры Φ. Поскольку A — произвольная точка фигуры Φ, то Φ — открытая фигура.

Границей фигуры Φ называется фигура, состоящая из всех ее граничных точек. Будем обозначать ее *гр*(Φ).

Фигура Φ называется ***замкнутой***, если она содержит свою границу. Таким образом, замкнутая фигура содержит все свои граничные точки.

Нетрудно доказать, что сфера $S(O, R)$ с центром в точке O и радиусом R является границей фигуры $U(O, R)$, рассмотренной выше, а шар с центром в точке O и радиусом R является замкнутой фигурой.

Фигура Φ называется ***выпуклой***, если вместе с любыми двумя своими точками она содержит и соединяющий их отрезок.

На рисунке 6 представлены выпуклые и невыпуклые фигуры.

<u>С в о й с т в о 3.</u> Пересечение двух выпуклых фигур является выпуклой фигурой.

Доказательство. Пусть Φ_1 и Φ_2 — выпуклые многогранники, Φ — их пересечение. Если точки A и B принадлежат Φ, то они принадлежат как Φ_1, так и Φ_2. Из выпуклости этих фигур следует, что в них содержится и отрезок AB. Следовательно, этот отрезок содержится и в пересечении этих фигур. Значит, пересечение фигур Φ_1 и Φ_2 является выпуклой фигурой.

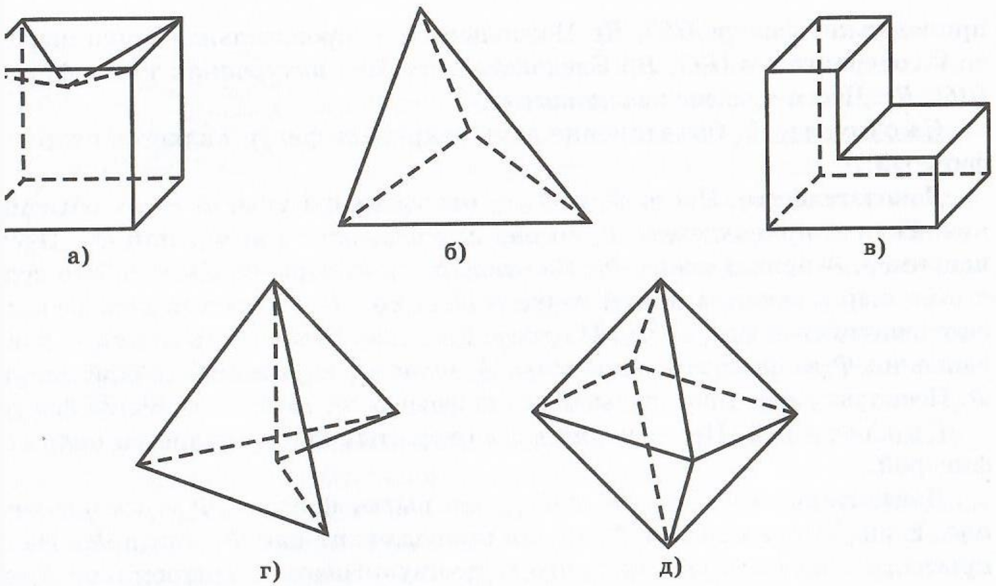


Рис. 6

Фигура Φ называется ***линейно связной***, если любые две ее точки можно единить ломаной, целиком содержащейся в этой фигуре. Ясно, что пуклая фигура связна.

Открытая связная фигура называется ***областью***. Например, фигура (O, R), рассмотренная выше, является областью.

Фигура Φ называется ***ограниченной***, если она целиком содержится в жотором шаре. Например, шар, куб являются ограниченными фигурами.

Наконец дадим определения тела и его поверхности.

Телом называется ограниченная область вместе со своей границей. Граница тела называется его ***поверхностью***.

Примерами тел являются шар, куб.

Упражнения

1. Для перечисленных ниже фигур укажите точки, которые являются нутренними, и точки, которые не являются внутренними: а) шар; б) куб; полупространство; г) сфера; д) плоскость.

2. Для перечисленных в задаче 1 фигур укажите точки, которые являются граничными, и точки, которые не являются граничными.

3. Может ли фигура не иметь внутренних точек?

4. Может ли фигура не иметь граничных точек?

5. Могут ли у фигуры все точки быть граничными?

6. Может ли граничная точка: а) принадлежать фигуре; б) не принадлежать фигуре?

7. Приведите примеры открытых фигур и фигур, не являющихся открытыми.

8. Приведите примеры замкнутых фигур и фигур, не являющихся замкнутыми.

9. Докажите, что пересечение двух замкнутых фигур является замкнутой фигурой.

10. Докажите, что объединение двух замкнутых фигур является замкнутой фигурой.

11. Укажите, какие фигуры, рассмотренные в упражнении 1, являются телами.

12. Какие фигуры, изображенные на рисунке 7, являются многогранниками?

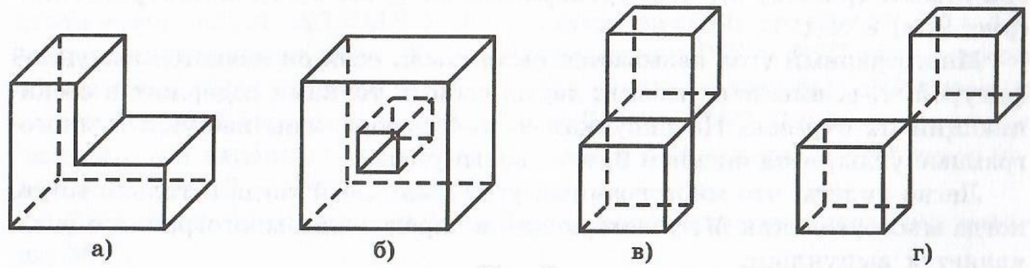


Рис. 7

13. Всегда ли является многогранником: а) пересечение двух многогранников; б) объединение двух многогранников? Приведите примеры.

3. МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

Пусть в плоскости π дан многоугольник M и точка S вне этой плоскости (рис. 8). Фигура в пространстве, образованная лучами с вершиной в точке S, пересекающими данный многоугольник, называется ***многогранным углом***. Точка S называется ***вершиной*** многогранного угла, а лучи, проходящие через вершины многоугольника, — ***ребрами*** многогранного угла. Углы, образованные соседними ребрами, называются ***плоскими углами*** многогранного угла, а также ***гранями*** многогранного угла.

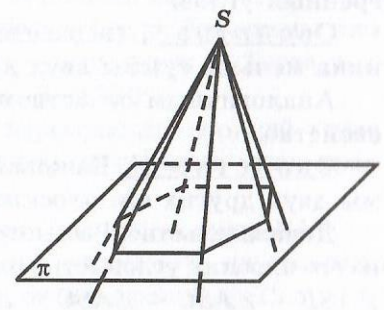


Рис. 8

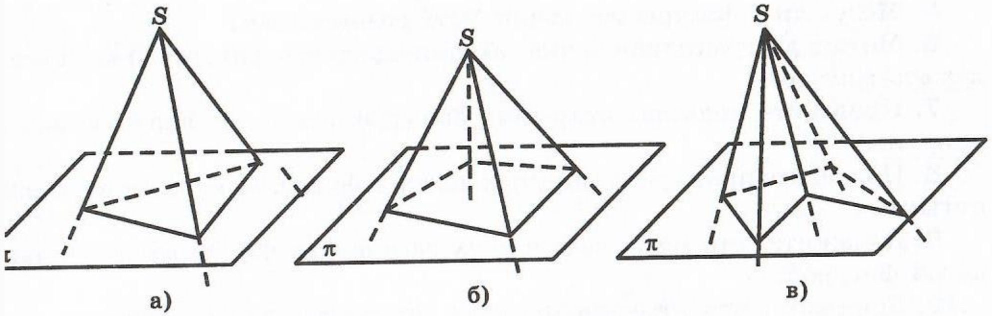


Рис. 9

Многогранный угол обозначается буквами $SABC...$, указывающими его ршину S и вершины A, B, C, ... многоугольника.

В зависимости от числа граней многогранные углы называются ***трех- анными*** (рис. 9, а), ***четырехгранными*** (рис. 9, б), ***пятигранными*** ис. 9, в) и т. д.

Многогранный угол называется ***выпуклым***, если он является выпуклой игурой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками содержит и соеди- іющий их отрезок. На рисунках 9, а, б изображены выпуклые много- анные углы, а на рисунке 9, в — невыпуклый.

Легко видеть, что многогранный угол выпуклый тогда и только тогда, огда многоугольник M, участвующий в определении многогранного угла, зляется выпуклым.

Понятие многогранного угла в пространстве является аналогом поня- ия многоугольника на плоскости. Вершинам многоугольника соответ- твуют ребра многогранного угла, сторонам — плоские углы, серединам торон — биссектрисы плоских углов, биссектрисам — биссектральные лоскости и т. д.

Рассмотрим свойства треугольников и аналогичные им свойства трех- ранных углов.

Свойство 1 (неравенство треугольника). Каждая сторона треуголь- ика меньше суммы двух других его сторон.

Аналогичным свойством для трехгранных углов является следующее войство.

Свойство 1′. Каждый плоский угол трехгранного угла меньше сум- ы двух других его плоских углов.

Доказательство. Рассмотрим трехгранный угол $SABC$. Пусть наибольший з его плоских углов есть угол ASC (рис. 10). Тогда выполняются неравенства $\angle ASB \leqslant \angle ASC < \angle ASC + \angle BSC$; $\angle BSC \leqslant \angle ASC < \angle ASC + \angle ASB$. Таким бразом, остается доказать неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

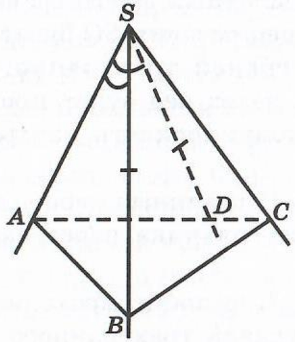


Рис. 10

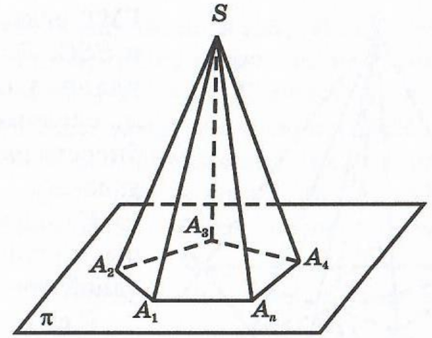


Рис. 11

Отложим на грани ASC угол ASD, равный ASB, и точку B выберем так, чтобы $SB = SD$. Тогда треугольники ASB и ASD равны (по двум сторонам и углу между ними) и, следовательно, $AB = AD$. Воспользуемся неравенством треугольника $AC < AB + BC$. Вычитая из обеих его частей $AD = AB$, получим неравенство $DC < BC$. В треугольниках DSC и BSC одна сторона общая (SC), $SD = SB$ и $DC < BC$. В этом случае против большей стороны лежит больший угол и, следовательно, $\angle DSC < \angle BSC$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства угол ASD, равный ASB, получим требуемое неравенство $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$.

Следствие. Сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше $360°$.

Доказательство. Пусть $SA_1...A_n$ — выпуклый многогранный угол (рис. 11). Рассмотрим трехгранный угол с вершиной A_1, образованный гранями A_1SA_2, A_1SA_n и углом $A_2A_1A_n$. В силу доказанного свойства, имеет место неравенство $\angle A_2A_1A_n < \angle SA_1A_2 + \angle SA_1A_n$. Аналогично для трехгранных углов с вершинами A_2, ... имеют место соответствующие неравенства. Складывая их и учитывая, что сумма углов многоугольника $A_1...A_n$ равна $180°(n-2)$, получаем $180°(n-2) < \angle SA_1A_2 + ... + \angle SA_1A_n$. В правой части стоит сумма углов треугольников без суммы углов при вершине S, т. е. без суммы плоских углов многогранного угла. Обозначим эту сумму через Σ. Тогда имеем $180°(n-2) < 180°n - \Sigma$. Откуда следует, что $\Sigma < 360°$.

Свойство 2. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Свойство 2′. Биссектральные полуплоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой.

Доказательство аналогично плоскому случаю. А именно, пусть $SABC$ — трехгранный угол (рис. 12). Биссектральная полуплоскость двугранного угла SA является ГМТ угла, равноудаленных от его граней ASC и ASB. Аналогично биссектральная полуплоскость двугранного угла SB является

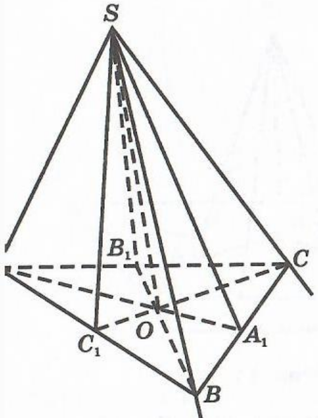


Рис. 12

ГМТ угла, равноудаленных от его граней BSA и BSC. Линия их пересечения SO будет равноудалена от всех граней трехгранного угла и, следовательно, через нее будет проходить биссектральная полуплоскость двугранного угла SC.

Свойство 3. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Свойство 3′. Плоскости, проходящие через биссектрисы граней трехгранного угла и перпендикулярные этим граням, пересекаются по одной прямой.

Доказательство аналогично доказательству предыдущего свойства.

Свойство 4. Медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Свойство 4′. Плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла биссектрисы противоположных граней, пересекаются по одной прямой.

Доказательство. Рассмотрим трехгранный угол $SABC$, $SA = SB = SC$ ис. 12). Тогда биссектрисы SA_1, SB_1, SC_1 углов ASB, ASC, BSC являются едианами соответствующих треугольников. Поэтому AA_1, BB_1, CC_1 — едианы треугольника ABC. Пусть O — точка их пересечения. Прямая SO держится во всех трех рассматриваемых плоскостях и, следовательно, вляется линией их пересечения.

Свойство 5. Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.

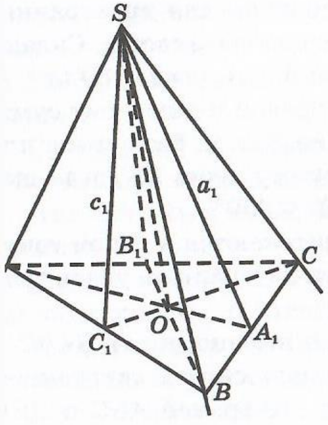


Рис. 13

Свойство 5′. Плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла и перпендикулярные противоположным граням, пересекаются по одной прямой.

Доказательство. Рассмотрим трехгранный угол с вершиной S и ребрами a, b, c. Обозначим a_1, b_1, c_1 — линии пересечения граней с плоскостями, проходящими через соответствующие ребра и перпендикулярные этим граням (рис. 13). Зафиксируем точку C на ребре c и опустим из нее перпендикуляры CA_1 и CB_1 на прямые a_1 и b_1. Обозначим A и B пересечения прямых CA_1 и CB_1 с прямыми a и b. Тогда SA_1 является проекцией AA_1 на грань BSC. Так как

BC перпендикулярна SA_1, то она перпендикулярна и AA_1. Аналогично AC перпендикулярна BB_1. Таким образом, AA_1 и BB_1 являются высотами треугольника ABC. Пусть O — точка их пересечения. Плоскости, проходящие через прямые a и a_1, b и b_1, перпендикулярны плоскости ABC и, следовательно, линия их пересечения SO перпендикулярна ABC. Значит, SO перпендикулярна AB. С другой стороны, CO перпендикулярна AB. Поэтому плоскость, проходящая через ребро c и SO, будет перпендикулярна противоположной грани.

Свойство 6 (теорема синусов). В треугольнике ABC со сторонами a, b, c соответственно имеют место равенства

$$a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C.$$

Свойство 6′. Пусть α, β, γ — плоские углы трехгранного угла, a, b, c — противолежащие им двугранные углы. Тогда

$$\sin \alpha : \sin a = \sin \beta : \sin b = \sin \gamma : \sin c.$$

Доказательство. Пусть $SABC$ — трехгранный угол. Опустим из точки C перпендикуляр CC_1 на плоскость ASB и перпендикуляр CA_1 на ребро SA (рис. 14). Тогда угол CA_1C_1 будет линейным углом двугранного угла a. Поэтому $CC_1 = CA_1 \cdot \sin a = SC \cdot \sin \beta \cdot \sin a$. Аналогично показывается, что $CC_1 = CB_1 \cdot \sin b = SC \times \times \sin \alpha \cdot \sin b$. Следовательно, имеет место равенство $\sin \beta \cdot \sin a = \sin \alpha \cdot \sin b$ и, значит, равенство $\sin \alpha : \sin a = \sin \beta : \sin b$. Аналогичным образом доказывается, что имеет место равенство $\sin \beta : \sin b = \sin \gamma : \sin c$.

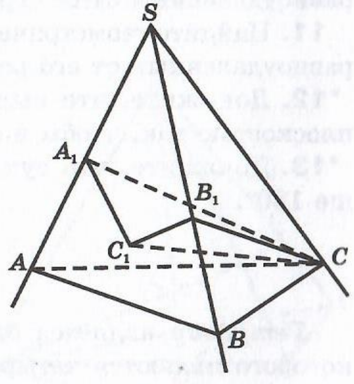


Рис. 14

Упражнения

1. Может ли быть трехгранный угол с плоскими углами: а) 30°, 60°, 20°; б) 45°, 45°, 90°; в) 30°, 45°, 60°?

2. Приведите примеры многогранников, у которых грани, пересекаясь в вершинах, образуют только: а) трехгранные углы; б) четырехгранные углы; в) пятигранные углы.

3. Докажите, что всякий плоский угол трехгранного угла больше разности двух других его плоских углов.

4. Два плоских угла трехгранного угла равны 70° и 80°. В каких границах находится третий плоский угол?

5. Докажите, что если в трехгранном угле два плоских угла прямые, и противоположные им двугранные углы прямые.

6. Плоские углы трехгранного угла равны 45°, 45° и 60°. Найдите ве-чину угла между плоскостями плоских углов в 45°.

7. В трехгранном угле два плоских угла равны по 45°; двугранный угол жду ними прямой. Найдите третий плоский угол.

8. Плоские углы трехгранного угла равны 60°, 60° и 90°. На его ребрах вершины отложены равные отрезки OA, OB, OC. Найдите двугранный ол между плоскостью угла в 90° и плоскостью ABC.

9. Каждый плоский угол трехгранного угла равен 60° На одном из его бер отложен от вершины отрезок, равный 3 см, и из его конца опущен рпендикуляр на противоположную грань. Найдите длину этого перпен-куляра.

10. Найдите геометрическое место внутренних точек трехгранного угла, вноудаленных от его граней.

11. Найдите геометрическое место внутренних точек трехгранного угла, вноудаленных от его ребер.

12. Докажите, что выпуклый четырехгранный угол можно пересечь юскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

13. Докажите, что сумма двугранных углов трехгранного угла боль-э 180°.

4. ТЕТРАЭДР

Тетраэдр является одним из простейших многогранников, гранями торого являются четыре треугольника. Его также, как и трехгранный ол, можно считать пространственным аналогом треугольника. Тетраэдр, анями которого являются правильные треугольники, будем называть *авильным*.

Рассмотрим свойства треугольников и аналогичные им свойства тетра-дров.

Свойство 1. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке — нтре вписанной окружности.

Свойство 1′. Биссектральные полуплоскости двугранных углов тет-аэдра пересекаются в одной точке — центре вписанной сферы.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — тетраэдр. Пересечением биссектраль-ых полуплоскостей двугранных углов с ребрами AB, AC и BC является очка O, равноудаленная от всех граней тетраэдра. Следовательно, эта точка ринадлежит биссектральным плоскостям остальных двугранных углов етраэдра и является центром вписанной сферы.

Свойство 2. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке — центре описанной окружности.

Свойство 2′. Плоскости, проходящие через середины ребер тетраэдра и перпендикулярные этим ребрам, пересекаются в одной точке — центре описанной сферы.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — тетраэдр. Пересечением плоскостей, проходящих через середины ребер AD, BD и CD, является точка O, равноудаленная от всех вершин тетраэдра. Следовательно, эта точка принадлежит остальным плоскостям и является центром описанной сферы.

Свойство 3. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, называемой центроидом треугольника, и делятся в этой точке в отношении 2 : 1.

Свойство 3′. Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке — центроиде тетраэдра и делятся в этой точке в отношении 3 : 1, считая от вершины.

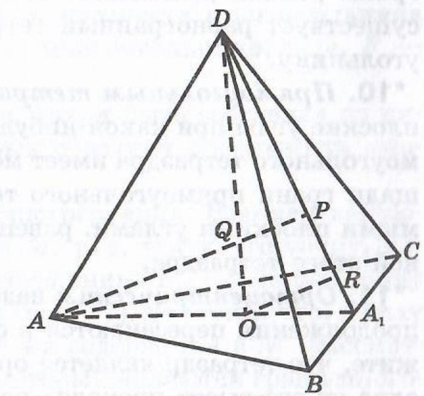


Рис. 15

Доказательство. Пусть $ABCD$ — тетраэдр, O — точка пересечения медиан треугольника ABC, P — точка пересечения медиан треугольника BCD, Q — точка пересечения отрезков DO и AP (рис. 15). Рассмотрим треугольник AA_1D. Точки O и P делят соответствующие стороны в отношении 2 : 1. Покажем, что точка Q делит DO и AP в отношении 3 : 1. В треугольнике AA_1P проведем OR параллельно AP. Она разделит отрезок PA_1 в отношении 2 : 1. Если отрезок A_1R принять за единицу, то отрезок DP будет равен 6. Отрезки DQ и QO относятся так же, как DP и PR, т. е. $DQ : QO = 6 : 2 = 3 : 1$. Аналогичным образом доказывается, что точка Q делит отрезок AP в отношении 3 : 1. Отрезки, соединяющие вершины B и C с точками пересечения медиан противоположных граней, также будут делить отрезок DO в отношении 3 : 1 и, следовательно, будут проходить через точку Q. Что и требовалось доказать.

Упражнения

1. Найдите радиус сферы, вписанной в правильный тетраэдр с ребром 1.

2. Может ли центр описанной около тетраэдра сферы находиться: а) внутри тетраэдра; б) вне тетраэдра; в) принадлежать грани тетраэдра?

3. Найдите радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра с бром 1.

4. Докажите, что прямые, перпендикулярные граням тетраэдра и процящие через центры их описанных окружностей, пересекаются в одной іке — центре описанной сферы.

5. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных бер тетраэдра, пересекаются в одной точке — центроиде.

6. Найдите радиус сферы, касающейся всех ребер правильного тетраэа с ребром 1.

*7. Докажите, что у тетраэдра существует сфера, касающаяся всех его бер, в том и только том случае, когда суммы противоположных ребер ого тетраэдра равны.

8. Всегда ли высоты тетраэдра или их продолжения пересекаются в ной точке? Приведите примеры.

*9. ***Равногранным тетраэдром*** называется тетраэдр, у которого все ани равны. Докажите, что для любого остроугольного треугольника цествует равногранный тетраэдр, грани которого равны данному треольнику.

10. ***Прямоугольным тетраэдром*** называется тетраэдр, у которого все гоские углы при какой-нибудь вершине прямые. Докажите, что для пряоугольного тетраэдра имеет место аналог теоремы Пифагора: квадрат плоади грани прямоугольного тетраэдра, лежащей против вершины с пряыми плоскими углами, равен сумме квадратов площадей остальных граей этого тетраэдра.

11. ***Ортоцентрическим*** называется тетраэдр, у которого высоты или их родолжения пересекаются в одной точке — ортоцентре третаэдра. Докаите, что тетраэдр является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда дна из его высот проходит через ортоцентр соответствующей грани.

12. Докажите, что тетраэдр является ортоцентрическим тогда и только огда, когда его противоположные ребра перпендикулярны.

5. ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Многогранник называется ***выпуклым***, если он является выпуклой фиурой, т. е. вместе с любыми двумя своими точками содержит и соединяюций их отрезок.

На рисунке 6 приведены примеры выпуклых и невыпуклых многогранников.

Рассмотрим некоторые свойства выпуклых многогранников.

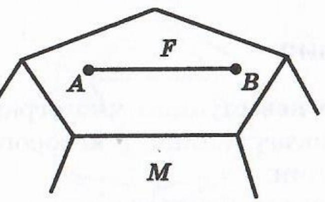


Рис. 16

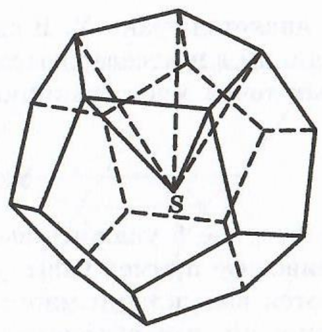


Рис. 17

Свойство 1. В выпуклом многограннике все грани являются выпуклыми многоугольниками.

Доказательство. Пусть F — какая-нибудь грань многогранника M и A, B — точки, принадлежащие грани F (рис. 16). Из условия выпуклости многогранника M следует, что отрезок AB целиком содержится в многограннике M. Поскольку этот отрезок лежит в плоскости многоугольника F, он будет целиком содержаться и в этом многоугольнике, т. е. F — выпуклый многоугольник.

Свойство 2. Выпуклый многогранник может быть составлен из пирамид с общей вершиной, основания которых образуют поверхность многогранника.

Доказательство. Пусть M — выпуклый многогранник. Возьмем какую-нибудь внутреннюю точку S многогранника M, т. е. такую его точку, которая не принадлежит ни одной грани многогранника M. Соединим точку S с вершинами многогранника M отрезками (рис. 17). Заметим, что, в силу выпуклости многогранника M, все эти отрезки содержатся в M. Рассмотрим пирамиды с вершиной S, основаниями которых являются грани многогранника M. Эти пирамиды целиком содержатся в M, и все вместе составляют многогранник M.

Свойство 3. Выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

Доказательство. Предположим противное, т. е. существуют точки A и B многогранника M, лежащие по разные стороны от плоскости некоторой его грани N (рис. 18). Рассмотрим пирамиды с вершинами в точках A, B, основаниями

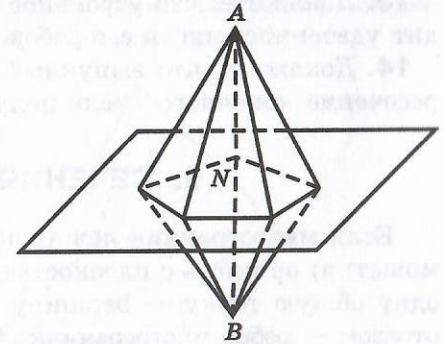


Рис. 18

торых является грань N. В силу выпуклости многогранника, эти пира- ды целиком в нем содержатся. Это противоречит тому, что N состоит из ничных точек многогранника M.

Упражнения

1. На рисунке 6 укажите выпуклые и невыпуклые многогранники.
2. Приведите пример невыпуклого многогранника, у которого все гра- являются выпуклыми многоугольниками.
3. Верно ли, что объединение выпуклых многогранников является пуклым многогранником?
4. Докажите, что пирамида является выпуклым многогранником тогда голько тогда, когда ее основание является выпуклым многоугольником.
5. Докажите, что призма является выпуклым многогранником тогда и лько тогда, когда ее основаниями являются выпуклые многоугольники.
6. Докажите, что любой выпуклый многогранник можно разбить на ко- чное число треугольных пирамид.
7. Может ли в многограннике быть 21 плоский угол?
8. Может ли выпуклый многогранник иметь 21 ребро? Приведите при- р такого многогранника. Сколько у него плоских углов?
9. Может ли число вершин многогранника равняться числу его гра- й?
10. Приведите пример выпуклого многогранника, у которого: а) 5 вер- ин; б) 7 вершин.
11. Установите связь между числом плоских углов многогранника и ислом его ребер.
12. Докажите, что утроенное число вершин многогранника не превосхо- ит удвоенного числа его ребер.
13. Докажите, что утроенное число граней многогранника не превосхо- ит удвоенного числа его ребер.
14. Докажите, что выпуклый многогранник можно представить как пе- ресечение конечного числа полупространств.

6. СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

Если многогранник лежит по одну сторону от данной плоскости, то он ожет: а) не иметь с плоскостью ни одной общей точки (рис. 19); б) иметь дну общую точку — вершину многогранника (рис. 20); в) иметь общий трезок — ребро многогранника (рис. 21); г) иметь общий многоугольник — рань многогранника (рис. 22).

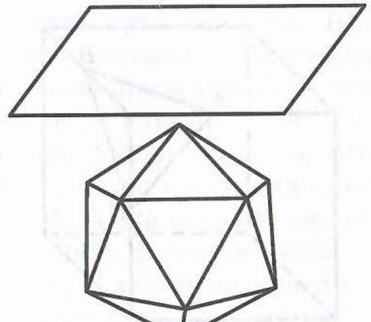


Рис. 19

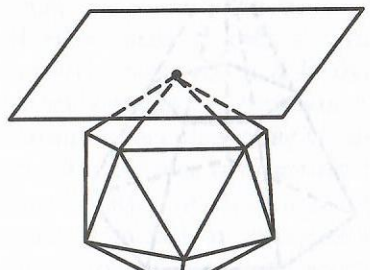


Рис. 20

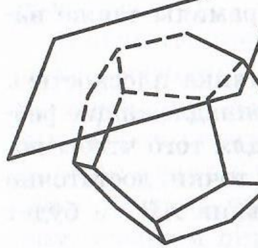


Рис. 21

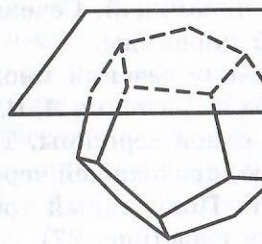


Рис. 22

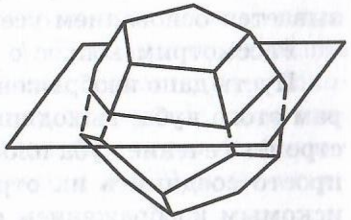


Рис. 23

Если у многогранника имеются точки, лежащие по разные стороны от данной плоскости, то общей частью многогранника и плоскости будет много- угольник, называемый ***сечением*** многогранника плоскостью (рис. 23).

Сечение призмы плоскостью, проходящей через диагональ основани и два прилежащих к ней боковых ребра, называется ***диагональным сече- нием*** (рис. 24).

Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основа- ния и вершину, называется ***диагональным сечением*** (рис. 25).

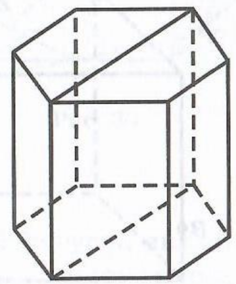


Рис. 24

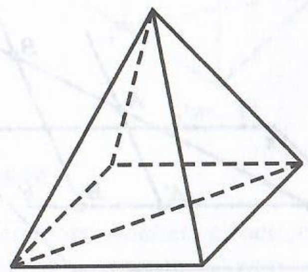


Рис. 25

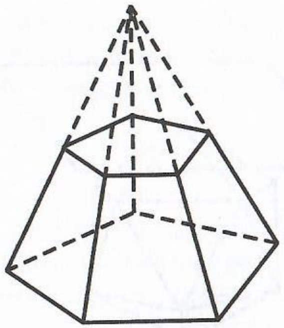


Рис. 26

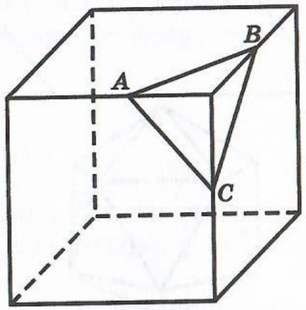


Рис. 27

Пусть плоскость пересекает пирамиду и параллельна ее основанию ис. 26). Часть пирамиды, заключенная между этой плоскостью и осно-нием, называется усеченной пирамидой. Сечение пирамиды также на-івается основанием усеченной пирамиды.

Рассмотрим вопрос о построении сечений многогранника плоскостью. Пусть дано изображение куба и три точки A, B, C, принадлежащие реб-ıм этого куба, выходящим из одной вершины. Тогда для того чтобы по-роить сечение куба плоскостью, проходящей через эти точки, достаточно юсто соединить их отрезками. Полученный треугольник ABC и будет :комым изображением сечения куба (рис. 27).

Для построения более сложных сечений используют метод нахождения ючки пересечения прямой и плоскости по заданным двум точкам этой эямой и их проекциям на плоскость. А именно, пусть прямая k проходит ерез точки A, B и известны параллельные проекции A', B' этих точек а плоскость π. Тогда пересечение прямой k с прямой k', проходящей ерез точки A', B', и будет искомым пересечением прямой k с плоскостью (рис. 28).

Используя этот метод, построим изображение сечения куба, проходя-цего через три точки A, B, C, принадлежащие попарно скрещивающимся

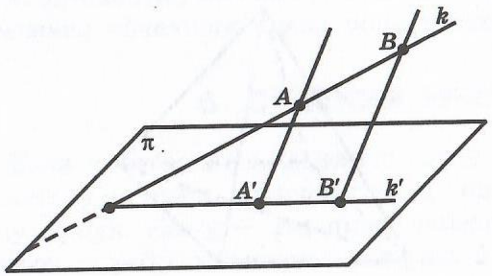


Рис. 28

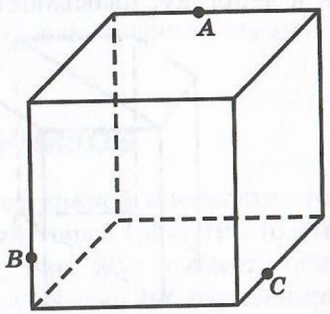


Рис. 29

ребрам этого куба (рис. 29). Найдем пересечение прямой AB, лежащей в плоскости сечения, с плоскостью основания куба. Для этого построим параллельные проекции A', B' точек A, B на основание куба в направлении бокового ребра куба (рис. 30). Пересечение прямых AB и $A'B'$ будет искомой точкой P. Она принадлежит плоскости сечения и плоскости основания куба. Следовательно, плоскость сечения пересекает основание куба по прямой CP. Точка пересечения этой прямой с ребром основания куба даст еще одну точку D сечения куба. Соединим точки C и D, B и D отрезками. Через точку A проведем прямую, параллельную BD, и точку ее пересечения с ребром куба обозначим E. Соединим точки E и C отрезком. Через точку A проведем прямую, параллельную CD, и точку ее пересечения с ребром куба обозначим F. Соединим точки A и F, B и F отрезками. Многоугольник $AECDBF$ и будет искомым изображением сечения куба плоскостью (рис. 30).

В качестве примера построим изображение сечения треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через три точки A, B, C, принадлежащие ее ребрам (рис. 31). Проведем прямую AB и ее точку пересечения с боковым ребром пирамиды обозначим через E. Проведем прямую EC и ее точку пересечения с ребром основания пирамиды обозначим через D. Соединим отрезками точки B и C, A и D. Четырехугольник $ABCD$ будет искомым сечением пирамиды.

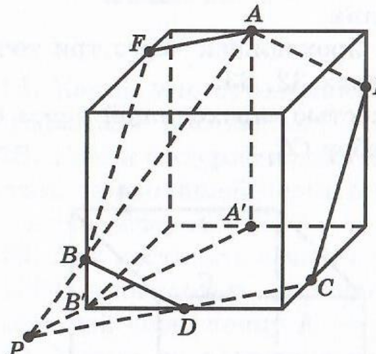


Рис. 30

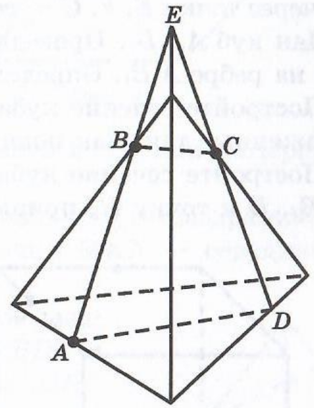


Рис. 31

Упражнения

1. Какой фигурой является сечение многогранника плоскостью?

2. Сколько диагональных сечений имеет n-угольная: а) призма; б) пирамида?

3. Сколько вершин, ребер и граней имеет n-угольная усеченная пирамида?

4. Может ли в сечении куба плоскостью получиться:

а) треугольник;

б) правильный треугольник;

в) равнобедренный треугольник?

5. Может ли в сечении куба плоскостью получиться:

а) четырехугольник;

б) квадрат;

в) прямоугольник;

г) неравнобедренная трапеция?

6. Может ли в сечении куба плоскостью получиться:

а) пятиугольник;

б) правильный пятиугольник?

7. Может ли в сечении куба плоскостью получиться:

а) шестиугольник;

б) правильный шестиугольник;

в) многоугольник с числом сторон больше шести?

8. Какой фигурой является сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1, D и точку K — середину ребра CC_1?

9. Какой фигурой является сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через точки E, F, G — середины соответственно ребер AD, A_1B_1, B_1C_1?

10. Дан куб $A...D_1$. Проведите сечение через вершины A, C и точку M, взятую на ребре A_1B_1. Определите вид сечения.

11. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через три точки, расположенные так, как показано на рисунках 32, 33.

12. Постройте сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1, D и точку H, принадлежащую ребру CC_1.

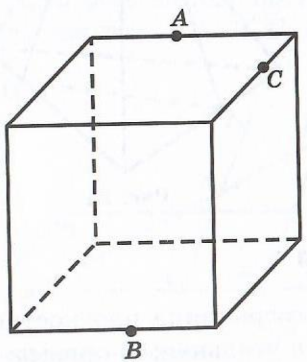


Рис. 32

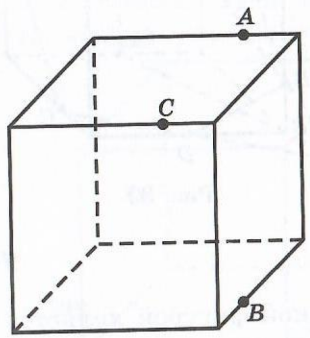


Рис. 33

13. Какой фигурой является сечение куба плоскостью, которая проходит через две противоположные вершины нижнего основания и середину одного из ребер верхнего основания? Найдите его периметр, если длина ребра куба равна 1.

14. Меньший куб поставлен на больший таким образом, что они имеют общую вершину и их грани попарно параллельны (рис. 34). Постройте сечение полученной фигуры плоскостью, проходящей через три точки, которые принадлежат скрещивающимся ребрам меньшего куба.

15. Найдите сечение куба плоскостью, имеющее наибольшую площадь.

16. Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 35.

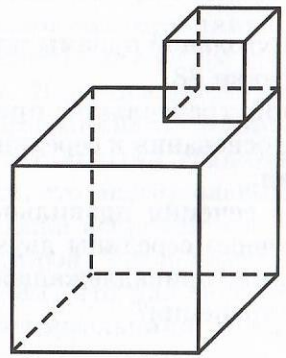


Рис. 34

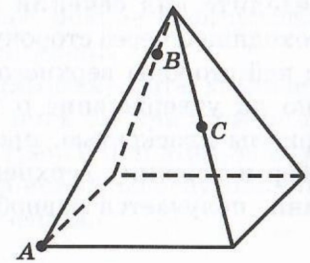


Рис. 35

17. Какие многоугольники можно получить в сечении четырехугольной пирамиды плоскостью?

18. Какой фигурой является сечение правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через вершину B и точки M, N — середины соответственно ребер AD, CD?

19. Как построить сечение правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, параллельной грани BDC и проходящей через точку K — середину ребра AD?

20. Может ли в сечении правильного тетраэдра плоскостью получиться квадрат?

21. Проведите плоскость, пересекающую тетраэдр по параллелограмму.

22. Может ли в сечении тетраэдра плоскостью получиться четырехугольник, изображенный на рисунке 36?

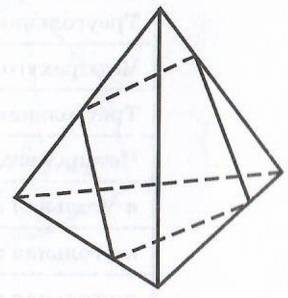


Рис. 36

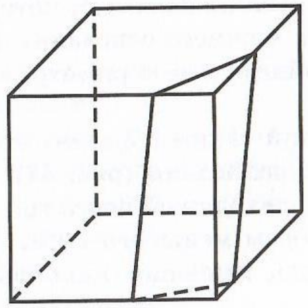


Рис. 37

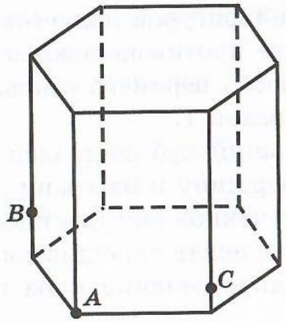


Рис. 38

23. Может ли в сечении куба плоскостью получиться четырехугольник, ображенный на рисунке 37?

24. Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, оходящей через точки, указанные на рисунке 38.

25. Определите вид сечения правильной треугольной призмы пло- ›стью, проходящей через сторону нижнего основания и середину скрещи- ющейся с ней стороны верхнего основания.

26. Верно ли утверждение о том, что в сечении правильной шести- ольной призмы плоскостью, проходящей через середины двух соседних ковых ребер и вершину верхнего основания, принадлежащей смежной ковой грани, получается равнобедренная трапеция?

. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таб- цу, в которой В — число вершин, Р — ребер и Г — граней данного мно- анника:

Название многогранника	В	Р	Г
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырехугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырехугольная призма	8	12	6
n-угольная пирамида	$n+1$	$2n$	$n+1$
n-угольная призма	$2n$	$3n$	$n+2$
n-угольная усеченная пирамида	$2n$	$3n$	$n+2$

Из этой таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство В − Р + Г = 2. Оказывается, что это равенство справедливо не только для этих многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника. Впервые это свойство выпуклых многогранников было доказано Леонардом Эйлером в 1752 году и получило название теоремы Эйлера.

Теорема Эйлера. Для любого выпуклого многогранника имеет место равенство

$$В - Р + Г = 2,$$

где В — число вершин, Р — число ребер и Г — число граней данного многогранника.

Доказательство. Для доказательства этого равенства представим поверхность данного многогранника сделанной из эластичного материала. Удалим (вырежем) одну из его граней и оставшуюся поверхность растянем на плоскости. Получим многоугольник (образованный ребрами удаленной грани многогранника), разбитый на более мелкие многоугольники (образованные остальными гранями многогранника).

Заметим, что многоугольники можно деформировать, увеличивать, уменьшать или даже искривлять их стороны, лишь бы при этом не происходило разрывов сторон. Число вершин, ребер и граней при этом не изменится.

Докажем, что для полученного разбиения многоугольника на более мелкие многоугольники имеет место равенство

$$В - Р + Г' = 1, \qquad (*)$$

где В — общее число вершин, Р — общее число ребер и Г′ — число многоугольников, входящих в разбиение. Ясно, что Г′ = Г − 1, где Г — число граней данного многогранника.

Докажем, что равенство (*) не изменится, если в каком-нибудь многоугольнике данного разбиения провести диагональ (рис. 39, а). Действительно,

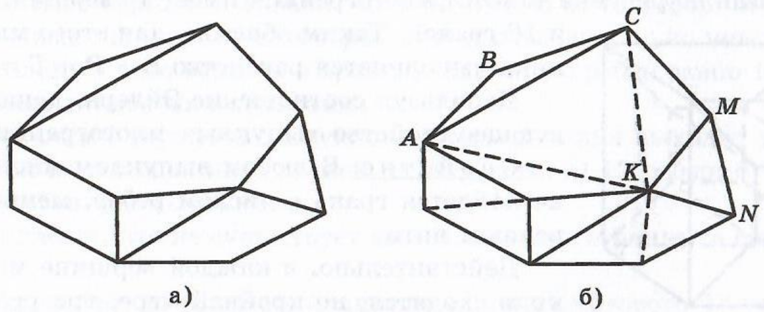


Рис. 39

:ле проведения такой диагонали в новом разбиении будет В вершин, - 1 ребер и количество многоугольников увеличится на единицу. Следо- ːельно, имеем

$$В - (Р + 1) + (Г' + 1) = В - Р + Г'.$$

Пользуясь этим свойством, проведем диагонали, разбивающие входя- ːе многоугольники на треугольники, и для полученного разбиения пока- м выполнимость равенства (*) (рис. 39, б). Для этого будем последо- ːельно убирать внешние ребра, уменьшая количество треугольников. ːи этом возможны два случая:

а) для удаления треугольника ABC требуется снять два ребра, в нашем ːучае AB и BC;

б) для удаления треугольника MKN требуется снять одно ребро, в на- ːм случае MN.

В обоих случаях равенство (*) не изменится. Например, в первом слу- ː после удаления треугольника граф будет состоять из В - 1 вершин, - 2 ребер и Г' - 1 многоугольника:

$$(В - 1) - (Р + 2) + (Г' - 1) = В - Р + Г'.$$

Самостоятельно рассмотрите второй случай.

Таким образом, удаление одного треугольника не меняет равенство (*). ːодолжая этот процесс удаления треугольников, в конце концов мы при- м к разбиению, состоящему из одного треугольника. Для такого раз- ения В = 3, Р = 3, Г' = 1 и, следовательно, В - Р + Г' = 1. Значит, ра- нство (*) имеет место и для исходного разбиения, откуда окончательно ːлучаем, что для данного разбиения многоугольника справедливо ра- нство (*). Поэтому для исходного выпуклого многогранника справедливо венство В - Р + Г = 2.

Пример многогранника, для которого не выполняется соотношение Эй- ра, показан на рисунке 40. Этот многогранник имеет 16 вершин, 32 ребра и 16 граней. Таким образом, для этого многогранника выполняется равенство В - Р + Г = 0.

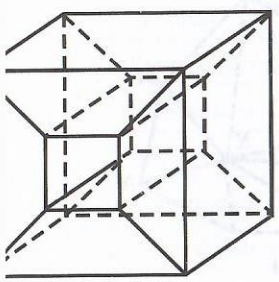


Рис. 40

Используя соотношение Эйлера, докажем следующее свойство выпуклых многогранников.

<u>Свойство.</u> В любом выпуклом многограннике найдется грань с числом ребер, меньшим или равным пяти.

Действительно, в каждой вершине многогранника сходятся, по крайней мере, три ребра. Если количество вершин равно В и в каждой из них

сходятся три ребра, то общее число ребер будет больше или равно 3В : 2. Делить на два нужно потому, что при таком подсчете ребер мы каждое ребро посчитаем дважды — один раз, как ребро, выходящее из одной его вершины, а второй раз, как ребро, выходящее из второй его вершины. Таким образом, для любого многогранника имеет место неравенство $3В \leqslant 2Р$.

Обозначим через $Г_n$ число граней с n ребрами. Тогда $Г = Г_3 + Г_4 + Г_5 + Г_6 + \ldots$. Каждая треугольная грань имеет три ребра, и число треугольных граней равно $Г_3$. Поэтому общее число ребер в треугольных гранях равно $3Г_3$. Аналогично общее число ребер в четырехугольных гранях равно $4Г_4$ и т. д.

Поскольку каждое ребро многогранника содержится ровно в двух гранях, то при таком подсчете ребер мы каждое ребро посчитаем дважды и, следовательно, будет иметь место равенство $2Р = 3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + 6Г_6 + \ldots$.

Воспользуемся равенством $6В - 6Р + 6Г = 12$, получающимся умножением обеих частей сооотношения Эйлера на 6. По доказанному выше имеет место неравенство $6В \leqslant 4Р$ и, следовательно, неравенство $6Г - 2Р \geqslant 12$. С другой стороны, $6Г = 6Г_3 + 6Г_4 + 6Г_5 + 6Г_6 + \ldots$, $2Р = 3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + 6Г_6 + \ldots$ Подставляя эти выражения в неравенство, получим неравенство $3Г_3 + 2Г_4 + Г_5 + 0Г_6 - Г_7 - \ldots \geqslant 12$. В левой части, начиная с $Г_7$, стоят отрицательные числа. Поэтому для того чтобы вся сумма была больше или равна 12, нужно, чтобы хотя бы одно из чисел $Г_3$ или $Г_4$, или $Г_5$ было отлично от нуля, т. е. в многограннике существовала грань с соответствующим числом ребер.

Упражнения

1. Опишите все выпуклые многогранники с пятью вершинами.

2. Гранями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин и граней, если он имеет: а) 12 ребер; б) 15 ребер?

3. Гранями выпуклого многогранника являются только четырехугольники. Сколько у него вершин и граней, если число ребер равно 12? Приведите пример такого многогранника.

4. Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин и граней, если у него: а) 12 ребер; б) 15 ребер? Нарисуйте эти многогранники.

5. Докажите, что не существует выпуклого многогранника с семью ребрами.

6. Существует ли выпуклый многогранник, у которого 13 граней, и в каждой из них по 13 ребер?

7. В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре
·ра. Сколько он имеет вершин и граней, если число ребер равно 12?
рисуйте такие многогранники.
8. Докажите, что в любом выпуклом многограннике есть треугольная
нь или в какой-нибудь его вершине сходятся три ребра.
·9. Дан выпуклый многогранник, все грани которого имеют 5, 6 или
ебер, и в каждой вершине сходится по три ребра. Докажите, что число
гиугольных граней на 12 больше числа семиугольных.
0. Подумайте, где в рассуждениях, показывающих справедливость со-
юшения Эйлера, использовалась выпуклость многогранника.

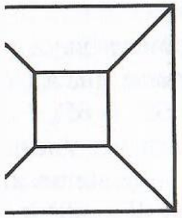


Рис. 41

*11. В кубе вырезали одну грань и оставшиеся грани растянули на плоскости. Образовавшийся при этом граф изображен на рисунке 41. Нарисуйте соответствующие графы:

а) для треугольной, четырехугольной и пятиугольной пирамид, у которых вырезается основание;

б) для треугольной, четырехугольной и пятиугольной призм, у которых вырезается основание;

в) для треугольной, четырехугольной и пятиугольной пирамид, у ко-
рых вырезается боковая грань;

г) для треугольной, четырехугольной и пятиугольной призм, у кото-
х вырезается боковая грань.

12. Докажите, что в любом выпуклом многограннике число треуголь-
х граней плюс число трехгранных углов больше или равно восьми.
13. Чему равно В − Р + Г для многогранника, изображенного на ри-
нке 7?

8. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Выпуклый многогранник называется ***правильным***, если его гранями
ляются равные правильные многоугольники и в каждой вершине схо-
тся одинаковое число граней.

Рассмотрим возможные правильные многогранники, и прежде всего те
них, гранями которых являются правильные треугольники. Наиболее
юстым таким правильным многогранником является треугольная пира-
ıда, гранями которой являются правильные треугольники (рис. 42).
каждой ее вершине сходятся по три грани. Имея всего четыре грани,
от многогранник называется также ***правильным тетраэдром*** или
юсто ***тетраэдром***, что в переводе с греческого языка означает четырех-
анник.

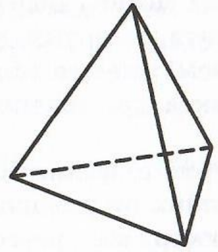


Рис. 42

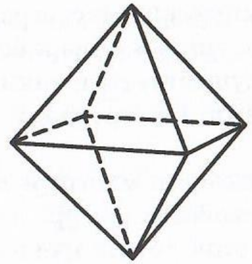


Рис. 43

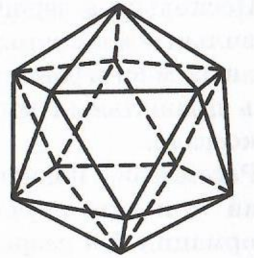


Рис. 44

Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники, и в каждой вершине сходится четыре грани, изображен на рисунке 43. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому он называется ***октаэдром***.

Многогранник, в каждой вершине которого сходится пять правильных треугольников, изображен на рисунке 44. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, поэтому он называется ***икосаэдром***.

Заметим, что поскольку в вершинах выпуклого многогранника не может сходиться более пяти правильных треугольников, то других правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.

Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то, кроме куба (рис. 45), других правильных многогранников, у которых гранями являются квадраты, не существует. Куб имеет шесть граней и поэтому называется также ***гексаэдром***.

Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники, и в каждой вершине сходятся три грани, изображен на рисунке 46. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому он называется ***додекаэдром***.

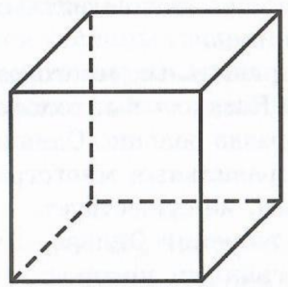


Рис. 45

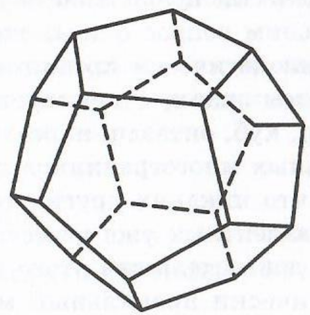


Рис. 46

Поскольку в вершинах выпуклого многогранника не могут сходиться завильные многоугольники с числом сторон больше пяти, то других пра-льных многогранников не существует, и таким образом, имеется только іть правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр икосаэдр.

Рассмотрим понятие правильного многогранника с точки зрения топо-гии — науки, изучающей свойства фигур, не зависящих от различных формаций без разрывов. С этой точки зрения, например, все треуголь-ики эквивалентны, так как один треугольник всегда может быть полу-н из любого другого соответствующим сжатием или растяжением сто-н. Вообще все многоугольники с одинаковым числом сторон эквива-нтны по той же причине.

Как в такой ситуации определить понятие топологически правильного ногогранника? Иначе говоря, какие свойства в определении правильного ногогранника являются топологически устойчивыми, и их следует оста-ть, а какие — не являются топологически устойчивыми, и их следует бросить?

В определении правильного многогранника количество сторон и коли-ество граней являются топологически устойчивыми, т. е. не меняющи-іся при непрерывных деформациях. Правильность же многоугольников является топологически устойчивым свойством. Таким образом, мы при-дим к следующему определению.

Выпуклый многогранник называется ***топологически правильным***, ли его гранями являются многоугольники с одним и тем же числом сто-н и в каждой вершине сходится одинаковое число граней.

Например, все треугольные пирамиды являются топологически пра-льными многогранниками, эквивалентными между собой. Все парал-лепипеды также являются эквивалентными между собой топологически завильными многогранниками. Четырехугольные пирамиды не являются пологически правильными многогранниками.

Выясним вопрос о том, сколько существует не эквивалентных между бой топологически правильных многогранников.

Как мы знаем, существует только пять правильных многогранников: траэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. Казалось бы, топологически завильных многогранников должно быть гораздо больше. Однако оказы-ется, что никаких других топологически правильных многогранников, эквивалентных уже известным правильным, не существует.

Для доказательства этого воспользуемся теоремой Эйлера. Пусть дан пологически правильный многогранник, гранями которого являются угольники, и в каждой вершине сходятся m ребер. Ясно, что n и m больше

или равны трем. Обозначим, как и раньше, В — число вершин, Р — число ребер и Г — число граней этого многогранника. Тогда

$$n\text{Г} = 2\text{Р};\ \text{Г} = \frac{2P}{n};\ m\text{В} = 2\text{Р};\ \text{В} = \frac{2P}{m}.$$

По теореме Эйлера, В − Р + Г = 2 и, следовательно,

$$\frac{2P}{m} - P + \frac{2P}{n} = 2.$$

Откуда $\text{Р} = \frac{2nm}{2n + 2m - nm}$.

Из полученного равенства, в частности, следует, что должно выполняться неравенство $2n + 2m - nm > 0$, которое эквивалентно неравенству $(n - 2)(m - 2) < 4$.

Найдем всевозможные значения n и m, удовлетворяющие найденному неравенству, и заполним следующую таблицу

m \ n	3	4	5
3	В = 4, Р = 6, Г = 4 тетраэдр	В = 6, Р = 12, Г = 8 октаэдр	В = 12, Р = 30, Г = 20 икосаэдр
4	В = 8, Р = 12, Г = 4 куб	Не существует	Не существует
5	В = 20, Р = 30, Г = 12 додекаэдр	Не существует	Не существует

Например, значения $n = 3$, $m = 3$ удовлетворяют неравенству $(n - 2)(m - 2) < 4$. Вычисляя значения Р, В и Г по приведенным выше формулам, получим Р = 6, В = 4, Г = 4.

Значения $n = 4$, $m = 4$ не удовлетворяют неравенству $(n - 2)(m - 2) < 4$ и, следовательно, соответствующего многогранника не существует.

Самостоятельно проверьте остальные случаи.

Из этой таблицы следует, что возможными топологически правильными многогранниками являются только правильные многогранники, перечисленные выше, и многогранники, им эквивалентные.

Упражнения

1. Сколько вершин, ребер и граней имеют: а) тетраэдр; б) октаэдр; в) куб; г) икосаэдр; д) додекаэдр?

2. Чему равны плоские углы додекаэдра?

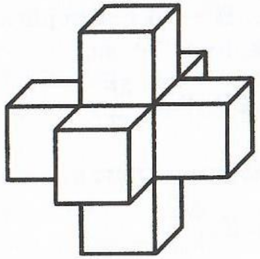


Рис. 47

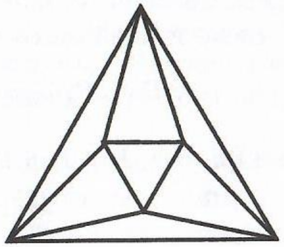


Рис. 48

3. Представьте многогранник — бипирамиду, сложенную из двух пра-
:льных тетраэдров совмещением их оснований. Будет ли он правильным
ногогранником? Почему?

4. Представьте многогранник — бипирамиду, сложенную из двух че-
трехугольных пирамид, боковыми гранями которых являются правиль-
ые треугольники, совмещением их оснований. Будет ли он правильным
ногогранником?

5. Является ли пространственный крест (фигура, составленная из семи
вных кубов, рис. 47) правильным многогранником? Сколько квадратов
раничивает его поверхность? Сколько у него вершин и ребер?

6. От каждой вершины тетраэдра с ребром 2 см отсекается тетраэдр с
бром 1 см. Какой многогранник останется?

7. Ребро октаэдра равно 1. Определите расстояние между его противо-
оложными вершинами.

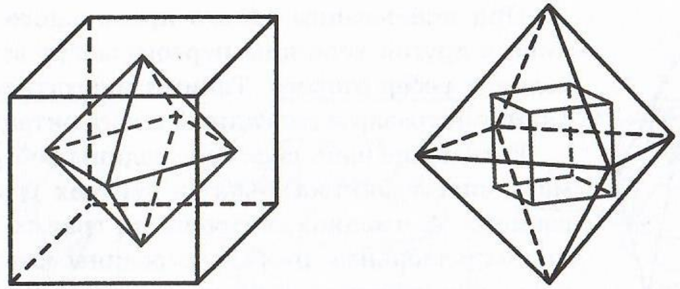
8. Докажите, что в октаэдре противоположные ребра параллельны.

9. Сколько красок потребуется для раскраски граней правильных мно-
гранников так, чтобы соседние грани были окрашены в разные цвета?

10. В многограннике вырезали одну грань и оставшиеся грани рас-
нули на плоскости. Нарисуйте соответствующие графы для правиль-
ых многогранников. Какому многограннику соответствует граф на ри-
нке 48?

9. КАСКАДЫ ИЗ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

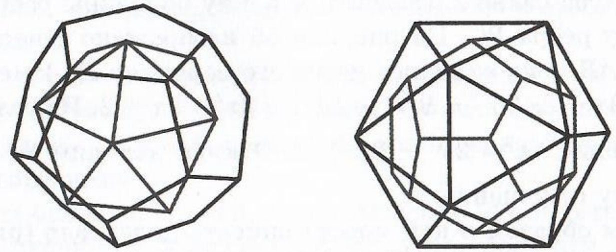
Правильные многогранники можно вписывать друг в друга. Так, в куб ожно вписать октаэдр. Центры граней куба образуют вершины вписан- ого в него октаэдра. В свою очередь, центры граней октаэдра образуют ершины вписанного в него куба. Многогранники, обладающие таким ойством, называются ***взаимно двойственными***. Таким образом, окта- др и куб — взаимно двойственные многогранники (рис. 49, а, б).



а) б)

Рис. 49

Другим примером взаимно двойственных правильных многогранников являются додекаэдр и икосаэдр. Центры граней додекаэдра находятся в вершинах вписанного в него икосаэдра. И наоборот, центры граней икосаэдра служат вершинами вписанного в него додекаэдра (рис. 50, а, б).



а) б)

Рис. 50

Правильные многогранники можно вписывать друг в друга не только таким способом, о котором сказано выше. Например, в куб можно вписать тетраэдр. При этом вершины тетраэдра будут лежать в вершинах куба (рис. 51). В свою очередь, куб можно вписать в додекаэдр так, чтобы вершины куба лежали в вершинах додекаэдра (рис. 52).

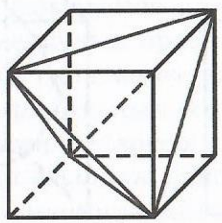


Рис. 51

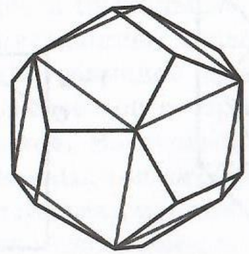


Рис. 52

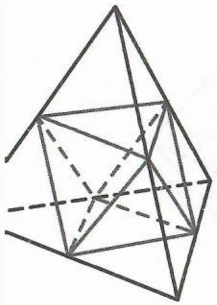


Рис. 53

При вписывании одного правильного многогранника в другой вершины первого могут лежать на серединах ребер второго. Такими многогранниками являются тетраэдр и вписанный в него октаэдр (рис. 53).

Есть и еще один способ: середины ребер вписываемого многогранника лежат в центрах граней описываемого. А именно, построим на гранях куба отрезки, параллельные ребрам, середины которых лежат в центрах граней. Одним из таких отрезков является отрезок AB (рис. 54). Соединим концы этих отрезков, как показано на рисунке 54. В результате получим эгогранник, у которого гранями являются двадцать треугольников и в кдой вершине сходятся пять ребер. Для того чтобы этот многогранник л икосаэдром, нужно подобрать такую длину отрезка AB, чтобы все его ра были равны.

Пусть ребро куба равно 2. Обозначим длину половины ребра AB через x. числим длину ребра BC. На рисунке 55 изображено сечение куба, пердикулярное AB и проходящее через его середину D. Имеем $CD^2 = 1 +$ $1 - x)^2 = x^2 - 2x + 2$. $BC^2 = BD^2 + CD^2 = 2x^2 - 2x + 2$. Из условия $AB = BC$ тучаем уравнение $4x^2 = 2x^2 - 2x + 2$. Откуда находим $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, т. е. равно золотому отношению.

Аналогичным образом в куб можно вписать додекаэдр (рис. 56). Прав в этом случае не все вершины додекаэдра будут лежать на гранях куба.

Покажем, что, комбинируя рассмотренные случаи, в любой правильй многогранник можно вписать все остальные правильные многогранки.

Действительно, как мы говорили, в куб можно вписать октаэдр, тетра), икосаэдр и додекаэдр, т. е. все остальные правильные многогранники.

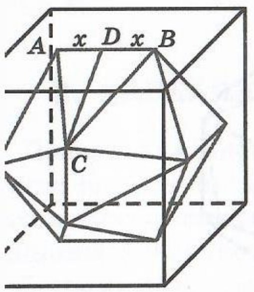


Рис. 54

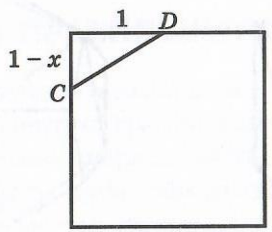


Рис. 55

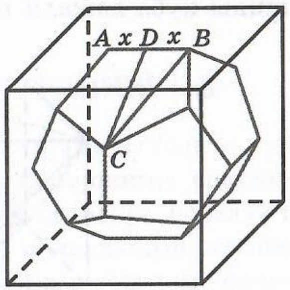


Рис. 56

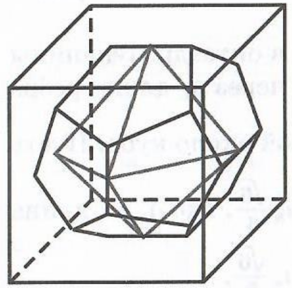


Рис. 57

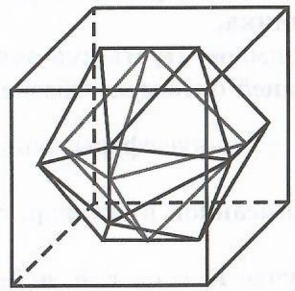


Рис. 58

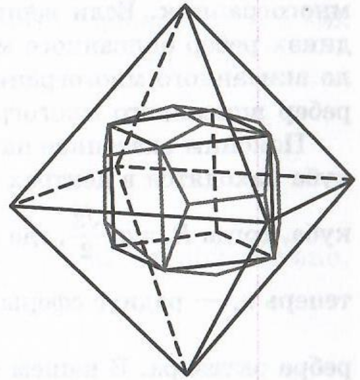


Рис. 59

В додекаэдр можно вписать икосаэдр, куб и тетраэдр. Вписывая в куб додекаэдр и октаэдр, получим октаэдр, вписанный в додекаэдр (рис. 57), и, следовательно, в додекаэдр можно вписать все остальные правильные многогранники.

В икосаэдр можно вписать додекаэдр и, следовательно, куб и тетраэдр. Вписывая в куб икосаэдр и октаэдр, получим октаэдр, вписанный в икосаэдр (рис. 58). Таким образом, в икосаэдр можно вписать все остальные правильные многогранники.

Рассмотрим октаэдр. В него можно вписать куб и тетраэдр. Описывая около куба, вписанного в октаэдр, додекаэдр, получим додекаэдр, вписанный в октаэдр (рис. 59). Аналогично, описывая около куба икосаэдр, получим икосаэдр, вписанный в октаэдр. Таким образом, в октаэдр можно вписать все остальные правильные многогранники.

Рассмотрим оставшийся правильный многогранник — тетраэдр. В него можно вписать октаэдр. Вписывая в октаэдр куб, икосаэдр и додекаэдр, получим, что в тетраэдр можно вписать все остальные правильные многогранники.

Последовательно вписывая друг в друга правильные многогранники, получим так называемое каскадное вписывание. Число всевозможных каскадов из различных правильных многогранников равно $5! = 120$.

Сделаем еще одно замечание, необходимое при построении каскадного вписывания правильных многогранников. Во-первых, центры последовательно вписанных друг в друга правильных многогранников совпадают; во-вторых, если вершины вписанного многогранника лежат в центрах граней описанного многогранника, то радиус сферы, описанной около вписанного многогранника, будет равен радиусу сферы, вписанной в описанный ногогранник. Если вершины вписанного многогранника лежат на серединах ребер описанного многогранника, то радиус сферы, описанной около вписанного многогранника, равен радиусу сферы, касающейся середин ребер вписанного многогранника.

Поясним сказанное на примере. Пусть куб вписан в октаэдр. Вершины куба находятся в центрах граней октаэдра. Обозначим через a_6 длину ребра куба, тогда $R_6 = a_6\frac{\sqrt{3}}{2}$, где R_6 — радиус сферы, описанной около куба. Пусть теперь r_8 — радиус сферы, вписанной в октаэдр, $r_8 = a_8\frac{\sqrt{6}}{6}$, где a_8 — длина ребра октаэдра. В нашем случае $R_6 = r_8$, т. е. $a_6\frac{\sqrt{3}}{2} = a_8\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Следовательно, $a_8 = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,a_6$, что позволяет найти ребро a_8 октаэдра, описанного около куба с ребром a_6.

В качестве примера приведем вычисления ребер следующих каскадно описанных друг в друга правильных многогранников:

$$\underset{(a_4,r_4,R_4)}{\text{тетраэдр}} \to \underset{(a_{20},r_{20},R_{20})}{\text{икосаэдр}} \to \underset{(a_{12},r_{12},R_{12})}{\text{додекаэдр}} \to \underset{(a_8,r_8,R_8)}{\text{октаэдр}} \to \underset{(a_6,r_6,R_6)}{\text{куб}}.$$

Здесь через a_i обозначена длина ребра соответствующего многогранника, через r_i — радиус вписанной сферы, через R_i — радиус описанной сферы $i = 4, 6, 8, 12, 20$).

В данном случае самым внутренним многогранником является куб, а самым внешним — тетраэдр. Поэтому сначала рассмотрим <u>первый этап</u>: описывание октаэдра около куба.

Как было показано выше, длина ребра описанного октаэдра a_8 связана с длиной ребра вписанного куба a_6 следующим соотношением: $\frac{3\sqrt{2}}{2}\,a_6 = a_8$.

<u>Второй этап</u>: описывание додекаэдра около октаэдра.

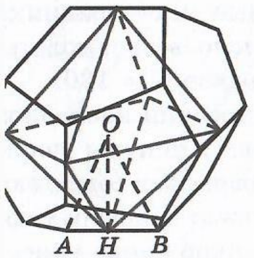


Рис. 60

Вычислим длину ребра додекаэдра a_{12}, описанного около октаэдра. Вершины октаэдра лежат в серединах противоположных ребер додекаэдра (рис. 60). Следовательно, радиус сферы, описанной около октаэдра, равен радиусу сферы, касающейся середин ребер додекаэдра. Радиус этой второй сферы легко найти, рассмотрев треугольник AOB: AB — ребро додекаэдра, точка O — центр октаэдра и додекаэдра, OH — радиус искомой сферы, который равен высоте равнобедренного треугольника, опущенной из вершины O. Так как $|AO| = |BO| = R_{12}$, то $|OH| = \sqrt{R_{12}^2 - \frac{a_{12}^2}{4}}$. Замечая, что $R_{12} = a_{12}\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$, имеем

$$|OH| = \frac{a_{12}\sqrt{2}\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{4}.$$

Далее, $|OH| = R_8$, отсюда $\frac{a_{12}\sqrt{2}\sqrt{7+3\sqrt{5}}}{4} = a_8\frac{\sqrt{2}}{2}$, и, следовательно,

$$a_{12} = \frac{2a_8}{\sqrt{7+3\sqrt{5}}}.$$

<u>Третий этап</u>: икосаэдр около додекаэдра.

Эти многогранники двойственны, поэтому $r_{20} = R_{12}$, т. е. $a_{20}\frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12} = a_{12}\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$, и, следовательно, $a_{20} = \frac{3}{2}a_{12}(\sqrt{5}-1)$.

<u>Четвертый этап</u>: тетраэдр около икосаэдра.

Грани икосаэдра лежат на гранях тетраэдра, причем центры соответствующих граней совпадают, т. е. равны радиусы вписанных сфер: $r_4 = r_{20}$, тогда $a_4\frac{\sqrt{6}}{12} = a_{20}\frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$, и, следовательно, $a_4 = \frac{1}{2}a_{20}\sqrt{2}(3+\sqrt{5})$.

После того, как вычислены ребра всех правильных многогранников, участвующих в данном каскадном вписывании, можно приступать к изготовлению модели. При этом следует начинать с самого внутреннего многогранника — куба и заканчивать внешним — тетраэдром.

Упражнения

1. Докажите, что вершины BDA_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ являются вершинами тетраэдра.

2. Чему равно ребро наибольшего тетраэдра, который можно поместить в куб с ребром 1 дм?

3. Докажите, что центры граней куба являются вершинами октаэдра. Найдите ребро этого октаэдра, если ребро куба равно 1.

4. Вычислите ребро додекаэдра, вписанного в куб с ребром 1.

5. Ребро тетраэдра равно 1. Найдите ребро вписанного в него куба.

6. Ребро додекаэдра равно 1. Найдите ребро вписанного в него икосаэдра.

7. Ребро додекаэдра равно 1. Найдите ребро вписанного в него куба.
8. Ребро додекаэдра равно 1. Найдите ребро вписанного в него окта-
эра.
9. Ребро икосаэдра равно 1. Найдите ребро вписанного в него куба.
10. Ребро икосаэдра равно 1. Найдите ребро вписанного в него додекаэдра.
11. Нарисуйте многогранник, вершинами которого являются середины
бер куба. Является ли этот многогранник правильным?
12. Нарисуйте многогранник, вершинами которого являются середины
бер октаэдра. Как этот многогранник связан с многогранником из преды-
щей задачи?

10. ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

В предыдущем параграфе мы рассмотрели правильные многогранники, е. такие выпуклые многогранники, гранями которых являются равные авильные многоугольники и в каждой вершине которых сходится одиковое число граней. Если в этом определении допустить, чтобы гранями югогранника могли быть различные правильные многоугольники, то лучим многогранники, которые называются полуправильными (равноольно полуправильными).

Полуправильным многогранником называется выпуклый многогранк, гранями которого являются правильные многоугольники, возможно с разным числом сторон, причем в каждой вершине сходится одинакое число граней.

К полуправильным многогранникам относятся правильные n-угольные измы, все ребра которых равны. Например, правильная пятиугольная изма на рисунке 61 имеет своими гранями два правильных пятиольника — основания призмы — и пять квадратов, образующих бокою поверхность призмы. К полуправильным многогранникам относятся так называемые антипризмы. На рисунке 62 мы видим пятиугольную тиипризму, полученную из пятиугольной призмы поворотом одного

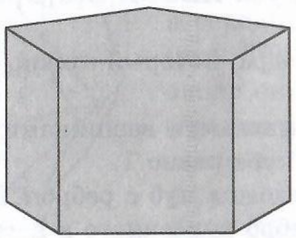


Рис. 61

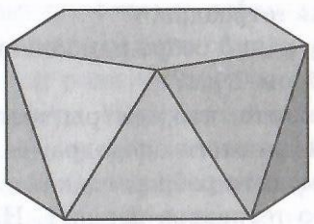


Рис. 62

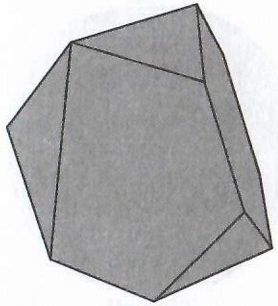


Рис. 63

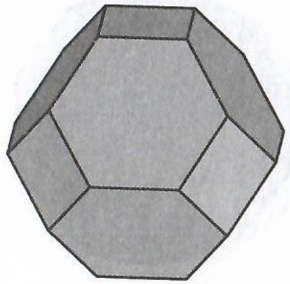


Рис. 64

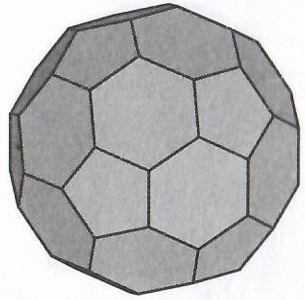


Рис. 65

из оснований относительно другого на угол 36°. Каждая вершина верхнего и нижнего оснований соединена с двумя ближайшими вершинами другого основания.

Кроме этих двух бесконечных серий полуправильных многогранников, имеются еще 13 полуправильных многогранников, которые впервые открыл и описал Архимед — это тела Архимеда.

Самые простые из них получаются из правильных многогранников операцией «усечения», состоящей в отсечении плоскостями углов многогранника. Если срезать углы тетраэдра плоскостями, каждая из которых отсекает третью часть его ребер, выходящих из одной вершины, то получим ***усеченный тетраэдр***, имеющий восемь граней (рис. 63). Из них четыре — правильные шестиугольники и четыре — правильные треугольники. В каждой вершине этого многогранника сходятся три грани.

Если указанным образом срезать вершины октаэдра и икосаэдра, то получим соответственно ***усеченный октаэдр*** (рис. 64) и ***усеченный икосаэдр*** (рис. 65). Обратите внимание на то, что поверхность футбольного мяча изготавливают в форме поверхности усеченного икосаэдра. Из куба и додекаэдра также можно получить ***усеченный куб*** (рис. 66) и ***усеченный додекаэдр*** (рис. 67).

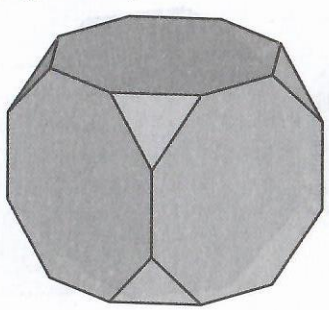


Рис. 66

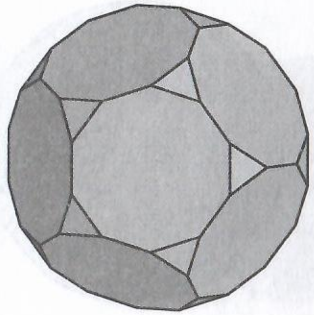


Рис. 67

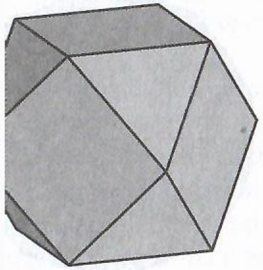


Рис. 68

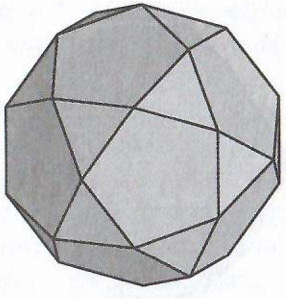


Рис. 69

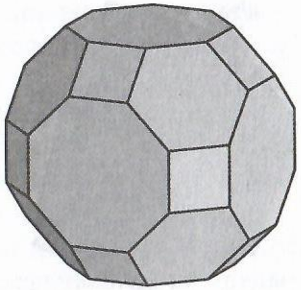


Рис. 70

Для того чтобы получить еще один полуправильный многогранник, оведем в кубе отсекающие плоскости через середины ребер, выходящих одной вершины. В результате получим полуправильный многогранник, торый называется ***кубооктаэдром*** (рис. 68). Его гранями являются :сть квадратов, как у куба, и восемь правильных треугольников, как у таэдра. Отсюда и его название — кубооктаэдр.

Аналогично, если в додекаэдре отсекающие плоскости провести через эредины ребер, выходящих из одной вершины, то получим многогран- :к, который называется ***икосододекаэдром*** (рис. 69). У него двадцать гра- й — правильные треугольники и двенадцать граней — правильные :тиугольники, т. е. все грани икосаэдра и додекаэдра.

К последним двум многогранникам снова можно применить операцию эчения. Получим ***усеченный кубооктаэдр*** (рис. 70) и ***усеченный икосодо- каэдр*** (рис. 71).

Мы рассмотрели 9 из 13 описанных Архимедом полуправильных много- анников. Четыре оставшихся — многогранники более сложного типа.

На рисунке 72 мы видим ***ромбокубооктаэдр***. Его поверхность состоит граней куба и октаэдра, к которым добавлены еще 12 квадратов.

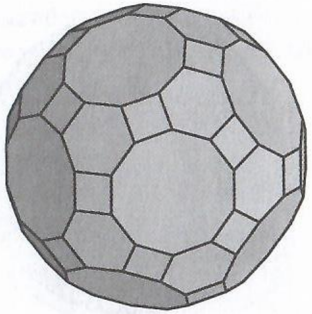


Рис. 71

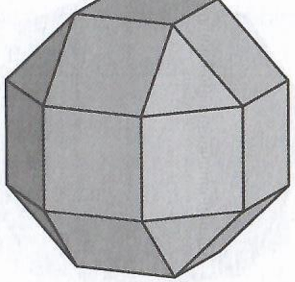


Рис. 72

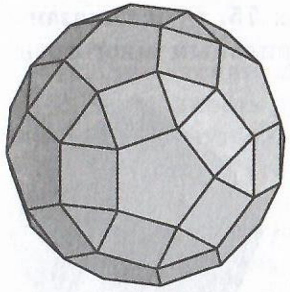
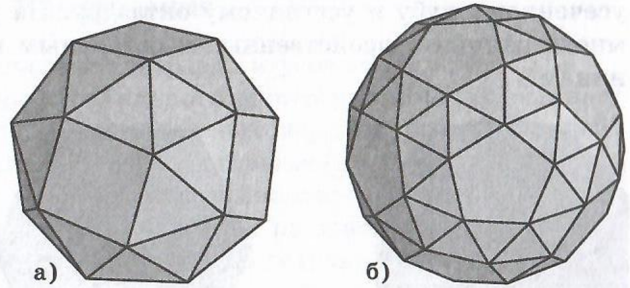


Рис. 73



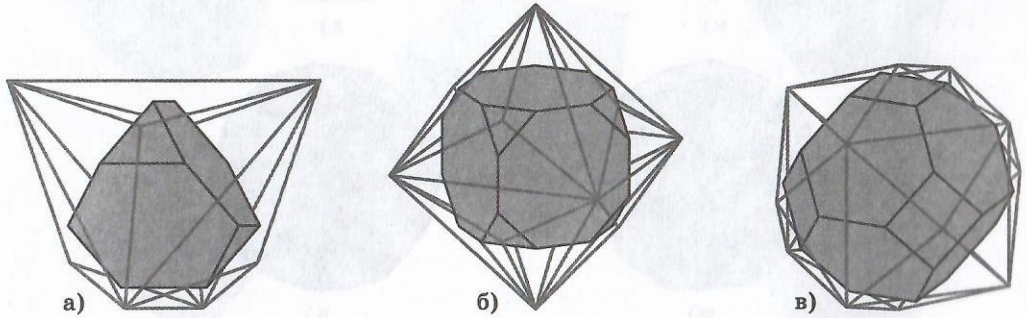
а) б)

Рис. 74

На рисунке 73 изображен ***ромбоикосододекаэдр***, поверхность которого состоит из граней икосаэдра, додекаэдра и еще 30 квадратов. На рисунках 74, а, б представлены соответственно так называемые ***плосконосый*** (иногда называют ***курносый***) ***куб*** и ***плосконосый*** (***курносый***) ***додекаэдр***, поверхности которых состоят из граней куба или додекаэдра, окруженных правильными треугольниками.

Как видим, каждая поверхность этих многогранников состоит из двух или трех типов граней: квадраты и треугольники, пятиугольники и треугольники, квадраты, пятиугольники и треугольники. Модели этих многогранников будут особенно привлекательны, если при их изготовлении грани каждого типа раскрасить в свой особый цвет.

Полуправильные многогранники называют также равноугольно полуправильными многогранниками из-за того, что все их многогранные углы равны. Рассмотрим многогранники, двойственные к полуправильным многогранникам. Их центры граней являются вершинами полуправильных многогранников. Они образуют класс так называемых равногранно полуправильных многогранников. У этих многогранников равны все грани, которые, однако, не являются правильными многоугольниками. На рисунках 75, а—в показаны многогранники, двойственные к усеченному тетраэдру,



а) б) в)

Рис. 75

еченному кубу и усеченному октаэдру. На рисунках 75, г—н показаны огогранники, двойственные к остальным полуправильным многогранкам.

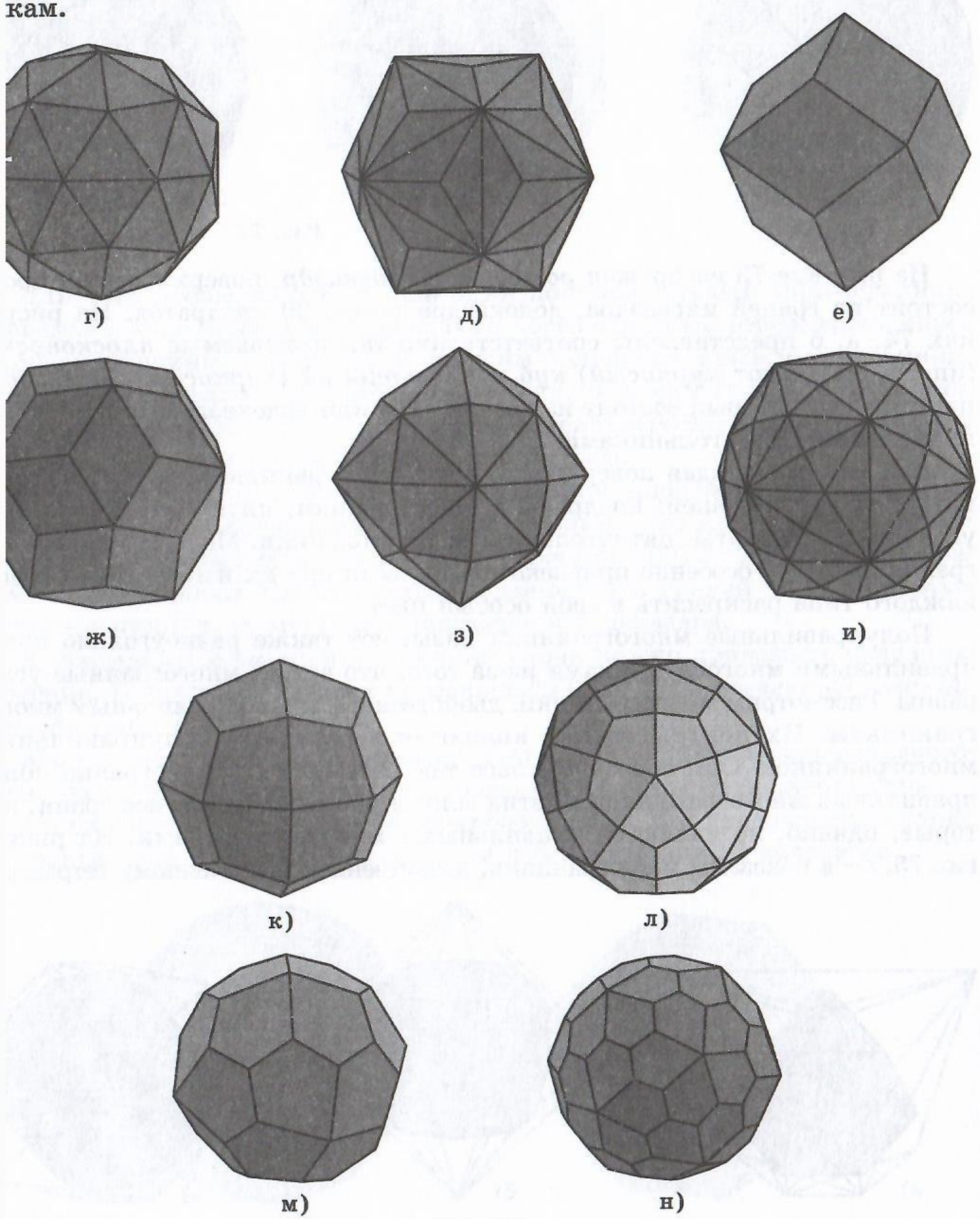


Рис. 75

Упражнения

1. Какие грани имеют усеченный тетраэдр и усеченный куб?

2. Поверхность какого полуправильного многогранника напоминает поверхность футбольного мяча? Сколько у него вершин, ребер и граней?

3. Докажите, что правильная n-угольная призма ($n = 3, 4, 5, \ldots$) с квадратными боковыми гранями является полуправильным многогранником.

4. Какую часть ребер тетраэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усеченный тетраэдр был полуправильным многогранником?

5. Какую часть ребер куба, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усеченный куб был полуправильным многогранником?

6. Какую часть ребер октаэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усеченный октаэдр был полуправильным многогранником?

7. Какую часть ребер икосаэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усеченный икосаэдр был полуправильным многогранником?

8. Какую часть ребер правильного додекаэдра, выходящих из одной вершины, должны отсекать плоскости, чтобы получившийся в результате усеченный додекаэдр был полуправильным многогранником?

9. Подсчитайте число вершин, ребер и граней: а) усеченного октаэдра; б) усеченного додекаэдра.

10. На рисунке 76 изображены пять многогранников. Многогранники, расположенные в углах рисунка, получены из куба одной и той же операцией.

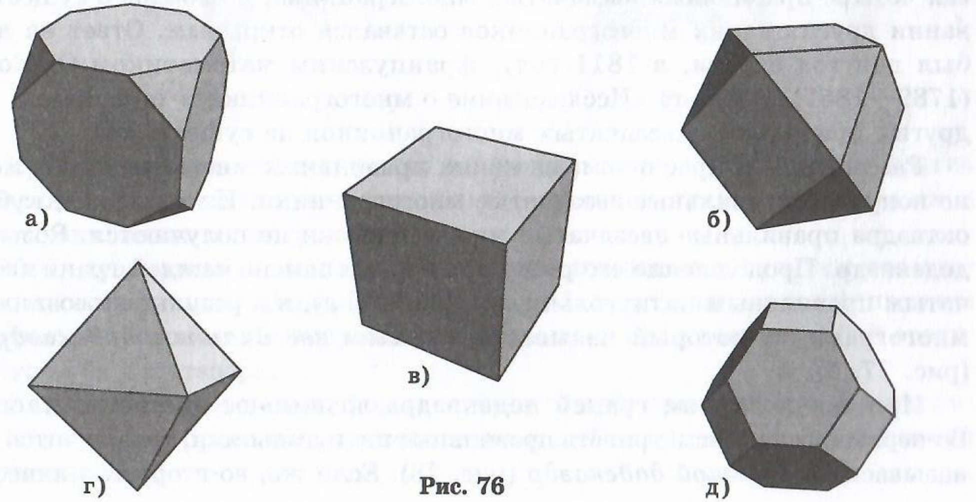


Рис. 76

го это за операция? Как называются все изображенные многогран-
ки?

11. Кубооктаэдр получен усечением куба. Найдите его ребро, если реб- куба равно 1.

12. Икосододекаэдр получен усечением додекаэдра. Найдите его ребро, ли ребро додекаэдра равно 1.

13. Установите, каким полуправильным многогранникам соответствуют ойственные многогранники на рисунке 75.

14. Приведите пример многогранника, не являющегося полуправиль- ым, гранями которого являются правильные многоугольники.

11. ЗВЕЗДЧАТЫЕ МНОГОГРАННИКИ

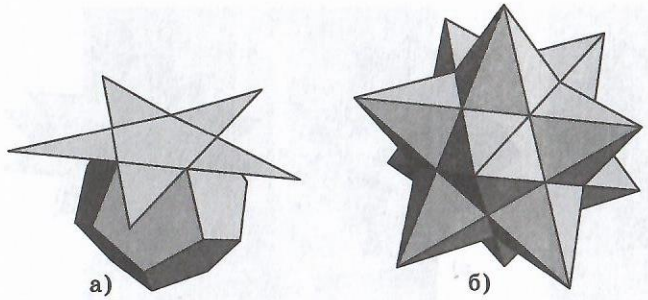
Кроме правильных и полуправильных многогранников красивые фор- ы имеют так называемые ***правильные звездчатые многогранники***. Они лучаются из правильных многогранников продолжением граней или бер аналогично тому, как правильные звездчатые многоугольники по- чаются продолжением сторон правильных многоугольников.

Первые два правильных звездчатых многогранника были открыты . Кеплером (1571—1630), а два других почти 200 лет спустя построил ранцузский математик и механик Л. Пуансо (1777—1859). Именно по- ому правильные звездчатые многогранники называются телами Кеплера- уансо.

В работе «О многоугольниках и многогранниках» (1810) Пуансо опи- л четыре правильных звездчатых многогранника, но вопрос о существо- нии других таких многогранников оставался открытым. Ответ на него ыл дан год спустя, в 1811 году, французским математиком О. Коши 789—1857). В работе «Исследование о многогранниках» он доказал, что угих правильных звездчатых многогранников не существует.

Рассмотрим вопрос о том, из каких правильных многогранников мож- о получить правильные звездчатые многогранники. Из тетраэдра, куба и таэдра правильные звездчатые многогранники не получаются. Возьмем декаэдр. Продолжение его ребер приводит к замене каждой грани звезд- тым правильным пятиугольником (рис. 77, а), и в результате возникает ногогранник, который называется ***малым звездчатым додекаэдром*** ис. 77, б).

При продолжении граней додекаэдра возникают две возможности. -первых, если рассматривать правильные пятиугольники, то получится так азываемый ***большой додекаэдр*** (рис. 78). Если же, во-вторых, в качестве



а) б)

Рис. 77

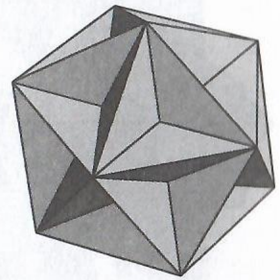


Рис. 78

граней рассматривать звездчатые пятиугольники, то получается ***большой звездчатый додекаэдр*** (рис. 79).

Икосаэдр имеет одну звездчатую форму. При продолжении граней пра- вильного икосаэдра получается ***большой икосаэдр*** (рис. 80).

Таким образом, существуют 4 типа правильных звездчатых многогран- ников.

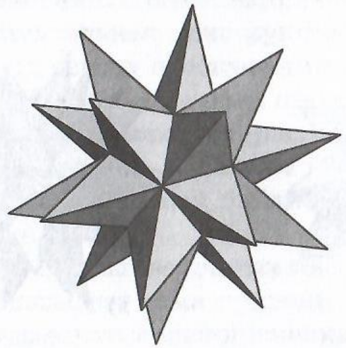


Рис. 79

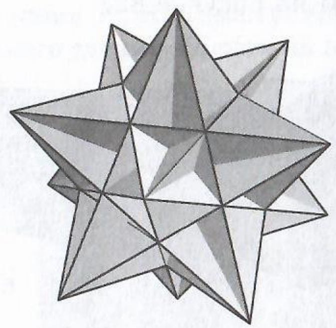


Рис. 80

Кроме правильных звездчатых многогранников, существуют и другие звездчатые формы, получающиеся продолжением граней правильных и полуправильных многогранников.

Так, продолжения граней кубооктаэдра приводят к четырем звездча- тым многогранникам. Первый из них (рис. 81, а) получается достраиванием на гранях кубооктаэдра треугольных пирамид и представляет собой соеди- нение куба и октаэдра.

Следующая звездчатая форма кубооктаэдра представлена на рисун- ке 81, б. Она образована из соединения куба и октаэдра добавлением 24 бипирамид.

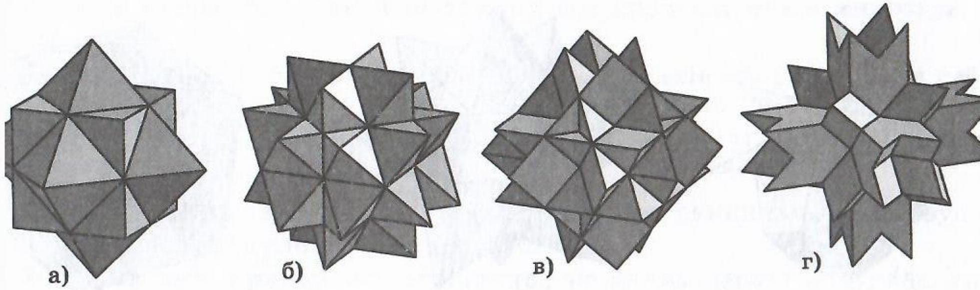


Рис. 81

Третья звездчатая форма кубооктаэдра (рис. 81, в) представляет собой ъединение шести четырехугольных пирамид, основаниями которых слу-:ат квадраты.

Последняя звездчатая форма кубооктаэдра (рис. 81, г) является соедиением звезды Кеплера и трех правильных четырехугольных призм, об-цей частью которых служит исходный куб.

Икосододекаэдр имеет 19 звездчатых форм, некоторые из которых предтавлены на рисунке 82.

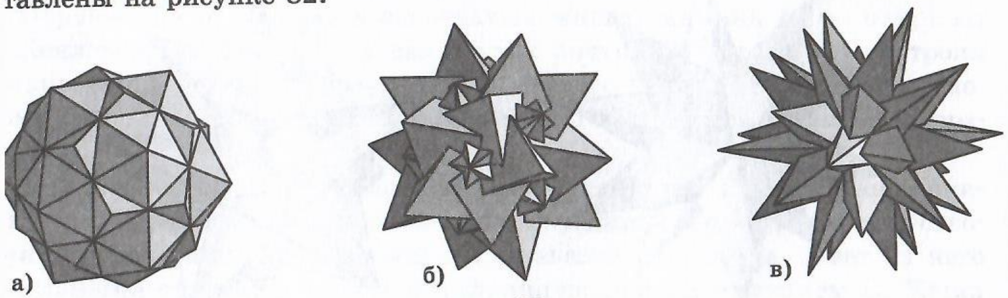


Рис. 82

Наконец, икосаэдр имеет 59 звездчатых форм, некоторые из которых представлены на рисунке 83.

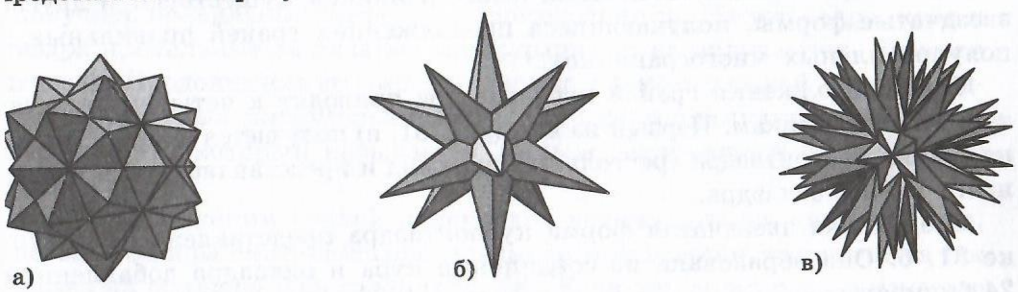


Рис. 83

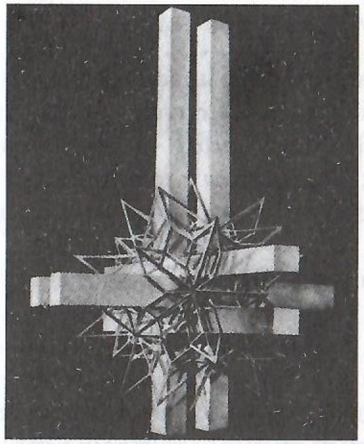


Рис. 84

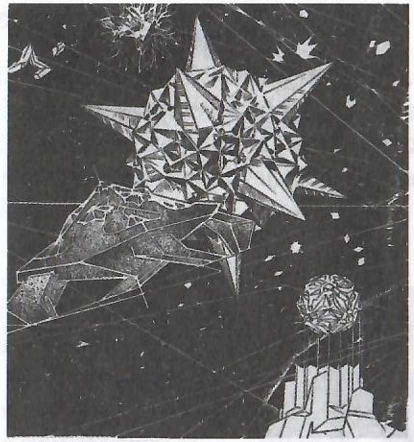


Рис. 85

Звездчатые многогранники очень декоративны, что позволяет широко применять их в ювелирной промышленности при изготовлении всевозможных украшений. Применяются они и в архитектуре. На рисунке 84 изображена оригинальная конструкция, выполненная В. Н. Гамаюновым и положенная в основу проекта административного здания в одном из итальянских городов. А необычный многогранник «Звезда» В. Н. Гамаюнова (рис. 85) вдохновил архитектора В. А. Сомова на создание проекта Национальной библиотеки в Дамаске (рис. 86).

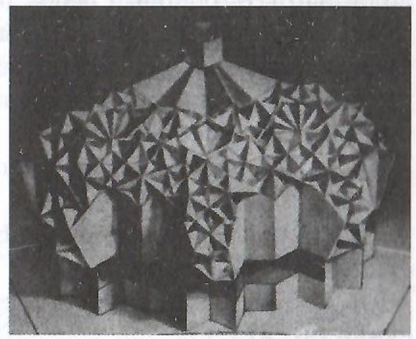


Рис. 86

Многие формы звездчатых многогранников подсказывает сама природа. Снежинки – это звездчатые многогранники (рис 87). С древности люди пытались описать все возможные типы снежинок, составляли специальные атласы. Сейчас известно несколько тысяч различных типов снежинок.

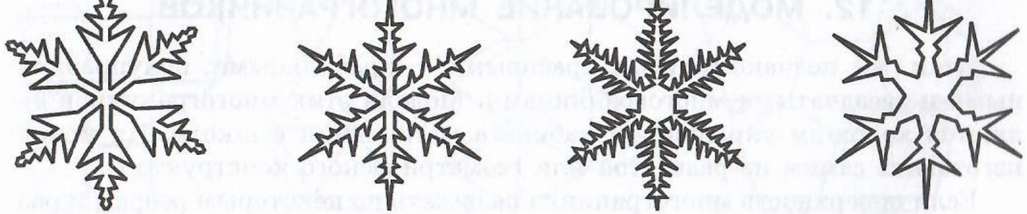


Рис. 87

Упражнения

1. На рисунке 88 изображен многогранник, называемый звездчатым ктаэдром. Он был открыт Леонардо да Винчи, затем спустя почти сто лет ереоткрыт И. Кеплером и назван им *«Stella octangula»* — звезда восьми-тольная. Является ли этот многогранник правильным звездчатым?

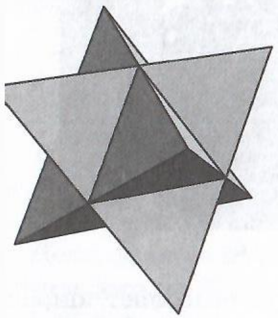


Рис. 88

2. Как можно получить звездчатый октаэдр из куба?

3. Звездчатый октаэдр является объединением двух правильных тетраэдров. Подумайте, какой фигурой является пересечение указанных тетраэдров.

4. Звездчатый октаэдр может быть получен добавлением правильных треугольных пирамид к граням октаэдра. Какими при этом должны быть боковые ребра пирамид, если ребра октаэдра равны 1?

5. Сколько вершин, ребер и граней имеет малый звездчатый додекаэдр?

6. Малый звездчатый додекаэдр может быть получен добавлением праильных пятиугольных пирамид к граням додекаэдра. Какими при этом олжны быть боковые ребра пирамид, если ребра додекаэдра равны 1?

7. Большой додекаэдр может быть получен удалением из икосаэдра равильных треугольных пирамид, основаниями которых являются грани косаэдра, а вершины лежат внутри икосаэдра. Какими при этом должны ыть боковые ребра пирамид, если ребра икосаэдра равны 1?

8. Соединением каких многогранников получен многогранник на рисуне 82, а?

9. Сколько тетраэдров участвуют в образовании многогранника на риунке 82, б?

10. Сколько октаэдров участвуют в образовании многогранника на риунке 83, а?

12. МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

Итак, мы познакомились с красивыми — правильными, полуправильыми и звездчатыми многогранниками. Модели этих многогранников являются хорошим украшением кабинета математики в школе. Их можно зготовить самим из разверток или геометрического конструктора.

Если поверхность многогранника разрезать по некоторым ребрам и развернуть ее на плоскость так, чтобы все многоугольники, входящие в эту

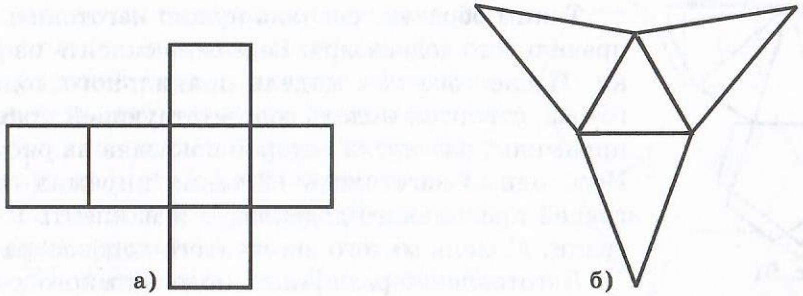


Рис. 89

поверхность, лежали в данной плоскости, то полученная фигура на плоскости называется ***разверткой*** многогранника. Например, на рисунке 89 изображены развертки куба и треугольной пирамиды.

Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно изготовить его развертку и затем склеить соответствующие ребра. Для удобства склейки развертку многогранника изготавливают с клапанами, по которым и производится склейка. На рисунке 90 изображены развертки с клапанами правильных многогранников.

Модель малого звездчатого додекаэдра очень просто изготовить из модели правильного додекаэдра. Достаточно изготовить 12 правильных пятиугольных пирамид с ребрами оснований, равными ребру правильного додекаэдра, и наклеить их на все грани правильного додекаэдра.

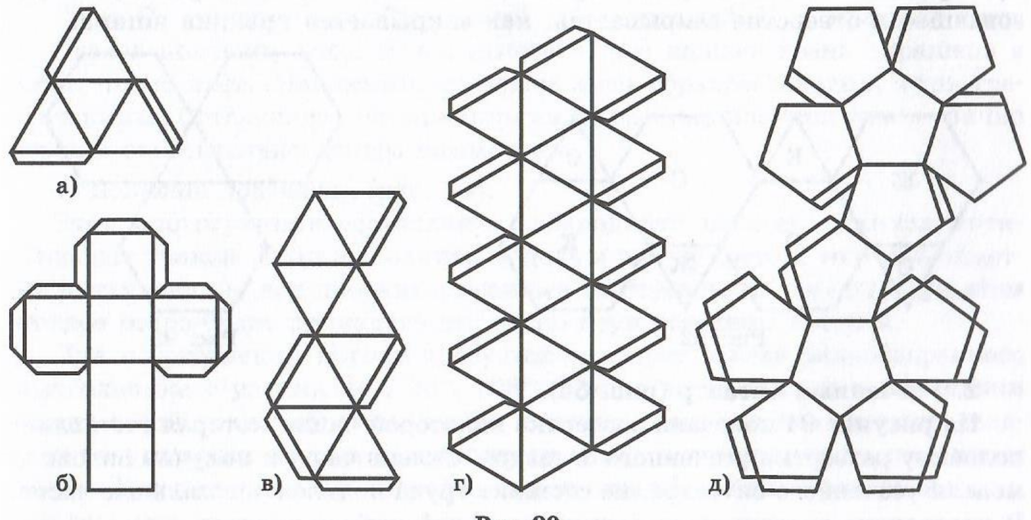


Рис. 90

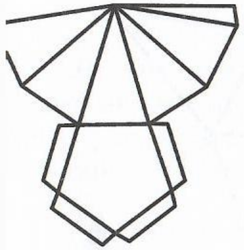


Рис. 91

Таким образом, сначала нужно изготовить модель правильного додекаэдра. Ее можно склеить из развертки. После того как модель правильного додекаэдра готова, строится модель соответствующей правильной пирамиды, развертка которой показана на рисунке 91. Необходимо изготовить 12 таких пирамид по числу граней правильного додекаэдра и наклеить их на его грани. Модель малого звездчатого додекаэдра готова.

Изготовление различных моделей многогранников з разверток описал английский математик М. Веннинджер в книге «Моели многогранников». Приведем несколько примеров.

1. Усеченный тетраэдр (рис. 63).

Этот многогранник будет выглядеть весьма эффектно, если его шестигольные грани раскрасить теми же цветами, в которые были окрашены етыре грани тетраэдра, а все остальные грани тетраэдра окрасить другим ветом. Другой способ окраски граней усеченного тетраэдра показан а рисунке 92. Здесь Ж — желтый цвет, С — синий, О — оранжевый, ; — красный. При этом каждая треугольная грань получает тот же цвет, то и противоположная шестиугольная грань.

Модель усеченного тетраэдра можно изготовить и иначе. Сначала деается развертка некоторой чаши (рис. 93). Дно чаши — треугольник, а стени — шестиугольники. Затем соответствующие стороны треугольников и іестиугольников склеиваются между собой (лучше оставить одну треугольую грань напоследок, крепко приклеив ее только одной стороной) и обраовавшееся отверстие закрывается, как закрывается крышка ящика.

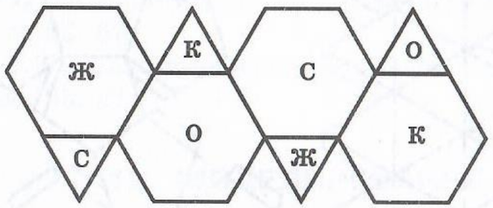


Рис. 92

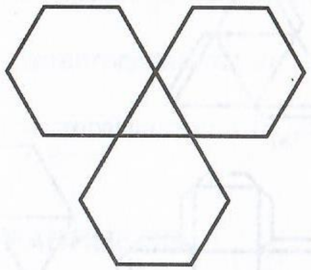


Рис. 93

2. Усеченный октаэдр (рис. 64).

На рисунке 94 показана развертка некоторой чаши, которая составляет эловину развертки усеченного октаэдра. Склеив чашу и получив половину одели усеченного октаэдра, не составит труда подклеить остальные части. последнюю очередь надо подклеить какой-нибудь квадрат.

Для раскраски этого многогранника используется пять цветов: раскраска шестиугольных граней модели должна совпадать с окраской граней октаэдра (четыре пары противоположных граней окрашиваются в четыре разных цвета). Для квадратов в усеченном октаэдре применяется пятый цвет.

Раскраска граней такова:

Здесь Ж — желтый цвет, З — зеленый, С — синий, О — оранжевый, К — красный.

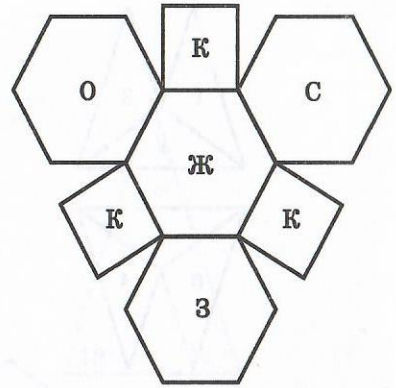


Рис. 94

3. Звездчатый октаэдр — Stella octangula Кеплера (рис. 88).

Для его изготовления требуется 24 равносторонних треугольника, составляющих боковые поверхности треугольных пирамид, основаниями которых являются грани октаэдра. Ниже приведена таблица раскраски боковых граней четырех таких пирамид.

	1	2	3
1	О	С	Ж
2	Ж	О	К
3	К	С	Ж
4	С	К	О

Здесь О — оранжевый, С — синий, Ж — желтый, К — красный цвет.

Сделав половину модели, вы заметите, что каждая грань окрашена в собственный цвет. (Напомним, что грань здесь образует не один, а три треугольника.) Остающиеся четыре пирамиды раскрашиваются симметрично первым относительно центра симметрии.

4. Большой додекаэдр (рис. 78).

Этот многогранник составлен из двенадцати пересекающихся пятиугольных граней. Если выполнить модель в шести цветах, то очень заметны выступающие над плоскими гранями пятиугольные звезды. При этом каждое ребро будет принадлежать ровно двум соседним звездам.

Для изготовления модели требуется трафарет в виде равнобедренного треугольника с углами 36°, 36°, 108°. Проще всего соединить заготовки между собой таким образом, чтобы получить боковые поверхности двадцати треугольных пирамид (вершинами вниз), а затем склеить пирамиды вместе. Порядок склейки приведен на рисунке 95, таблица раскраски приведена ниже.

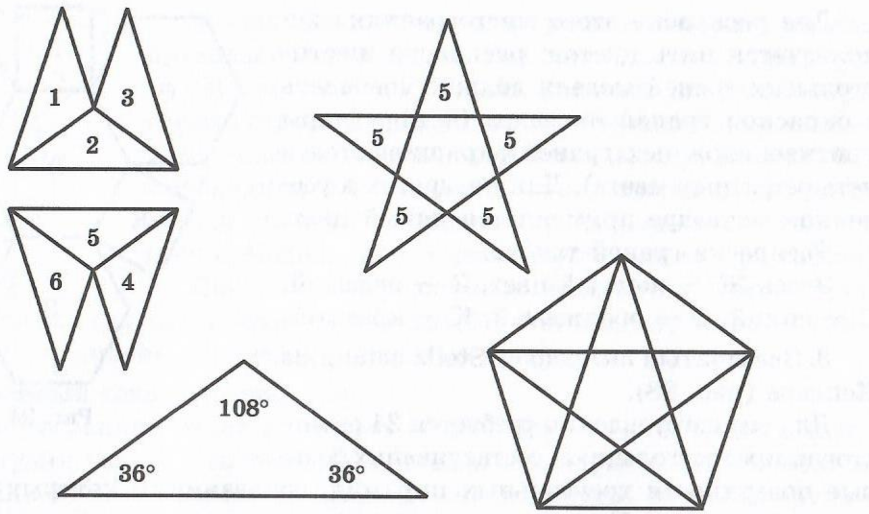


Рис. 95

	1	2	3
1	Ж	Б	З
2	С	Б	Ж
3	О	Б	С
4	К	Б	О
5	З	Б	К

	1	2	3
1	З	О	Ж
2	Ж	К	С
3	С	З	О
4	О	Ж	К
5	К	С	Ж

Здесь Ж — желтый цвет, Б — белый, З — зеленый, О — оранжевый, — красный, С — синий.

Треугольники 5 склеиваем с треугольниками 2 и получаем половину одели. Остальные ее части симметричны полученным.

5. Большой звездчатый додекаэдр (рис. 79).

Модель этого многогранника можно получить подклеивая треугольные ирамиды к граням икосаэдра. Однако при таком способе изготовления одель трудно сделать аккуратно. Можно поступить иначе: взять заго- »вки — равнобедренные треугольники с углами 36°, 72°, 72°, склеить их, ак показано на рисунке 96, и раскрасить в соответствии с приведенной иже таблицей.

Первые пять пирамид (1, 2, 3) склеиваются между собой в кольцо таким ;разом, чтобы внешние ребра образовывали треугольники 1. Их стороны иют нам пятиугольники. Сюда белыми треугольниками подклеиваются

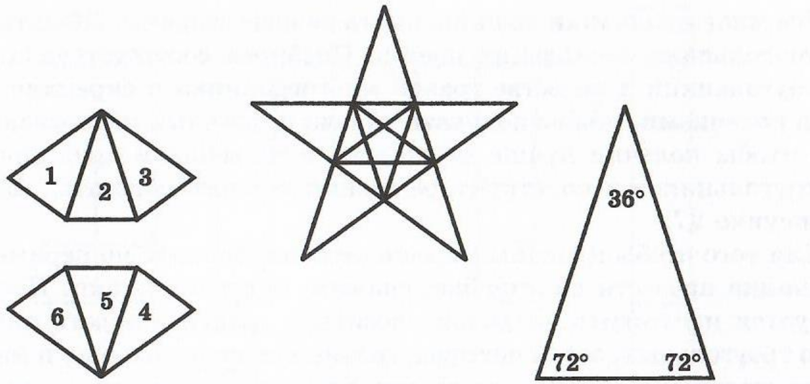


Рис. 96

1	2	3	4	5	6
Ж	З	С	Б	З	С
С	Ж	О	Б	Ж	О
О	С	К	Б	С	К
К	О	З	Б	О	З
З	К	Ж	Б	К	Ж

остальные пирамиды (4, 5, 6). Обратите внимание, что треугольники, лежащие в одной плоскости, одинакового цвета. Остающиеся части симметричны полученным.

Модели звездчатых многогранников очень декоративны, однако их изготовление требует много времени и терпения.

Существует другой, более быстрый способ изготовления моделей многогранников из так называемого геометрического конструктора, состоящего из многоугольников, сделанных из плотного материала с отгибающимися клапанами (рис. 97) и резиновых колечек — основной крепежной детали конструктора.

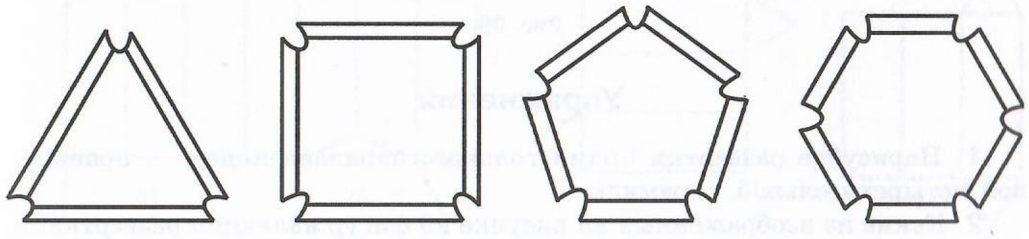


Рис. 97

Все многоугольники должны иметь равные стороны. Желательно иметь ногоугольники нескольких цветов. Подбирая соответствующим образом ногоугольники в качестве граней многогранника и скрепляя их резиноыми колечками, можно получать модели различных многогранников. Для эго чтобы колечки лучше держались и не мешали друг другу, уголки ногоугольников в конструкторе можно немного обрезать, как показано а рисунке 97.

Для того чтобы клапаны хорошо отгибались, надо по периметру многоугольника провести по линейке, скажем, концом ножниц. Поскольку поребуется изготовить несколько десятков граней каждого типа (больше сего треугольных, затем четырехугольных и пятиугольных и меньше всего естиугольных), то сначала нужно сделать как можно точнее шаблоны раней, а затем просто обводить эти шаблоны карандашом.

Из такого конструктора легко собираются правильные и полуправильые многогранники.

Можно воспользоваться другим, очень интересным и необычным спообом изготовления правильного додекаэдра, который заключается в слеующем. Развертку правильного додекаэдра (рис. 98) необходимо разделить на две звезды и наложить их одна на другую так, чтобы вышла десятиугольная звезда. Эту звезду следует обвязать резинкой, обходя ею углы очередно сверху и снизу и прижимая модель свободной рукой к столу. пустив руку, видим, что раскрывшаяся звезда превращается в пространственную модель правильного додекаэдра.

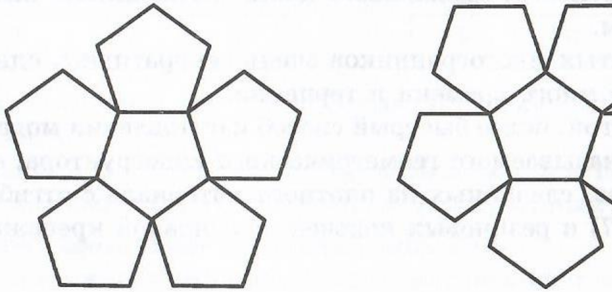


Рис. 98

Упражнения

1. Нарисуйте развертки прямоугольного параллелепипеда и правильой четырехугольной пирамиды.

2. Какие из изображенных на рисунке 99 фигур являются развертками уба?

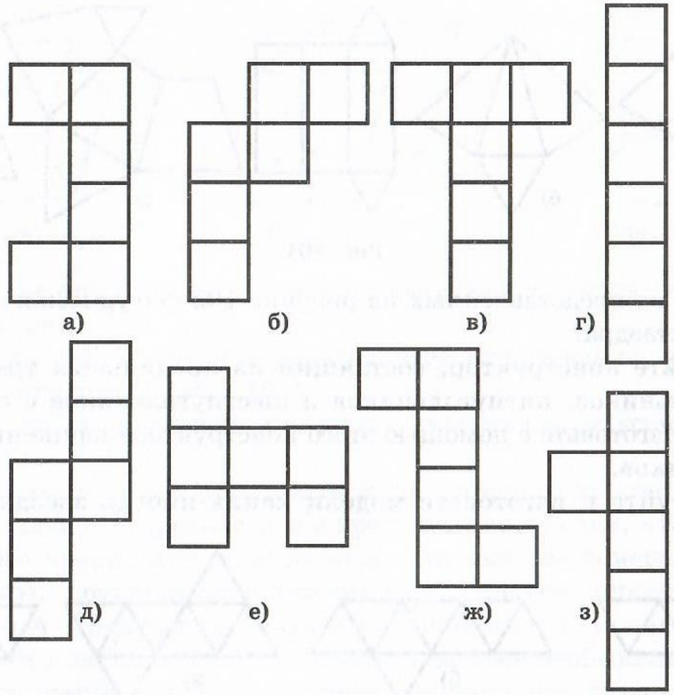


Рис. 99

3. На рисунке 100 укажите фигуры, которые являются развертками призм. Определите вид этих призм.

4. Среди данных на рисунке 101 разверток определите развертки пирамид. Выясните их вид.

5. Может ли разверткой пирамиды быть квадрат?

6. Может ли разверткой пирамиды быть прямоугольник?

7. Изготовьте развертки и склейте из них модели куба и тетраэдра.

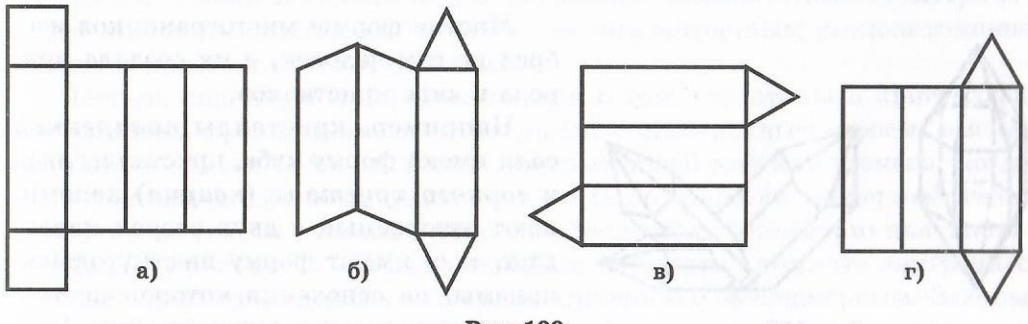


Рис. 100

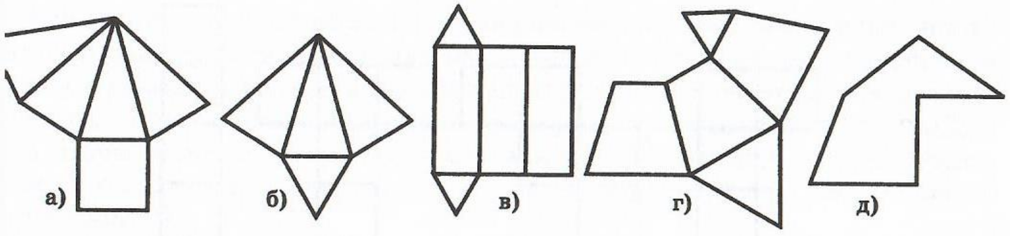


Рис. 101

8. Какие из представленных на рисунке 102 фигур можно считать раз-
эртками октаэдра?

9. Сделайте конструктор, состоящий из правильных треугольников, етырехугольников, пятиугольников и шестиугольников с одинаковыми торонами. Изготовьте с помощью этого конструктора какие-нибудь модели ногогранников.

10. Нарисуйте и изготовьте модели каких-нибудь звездчатых много-ранников.

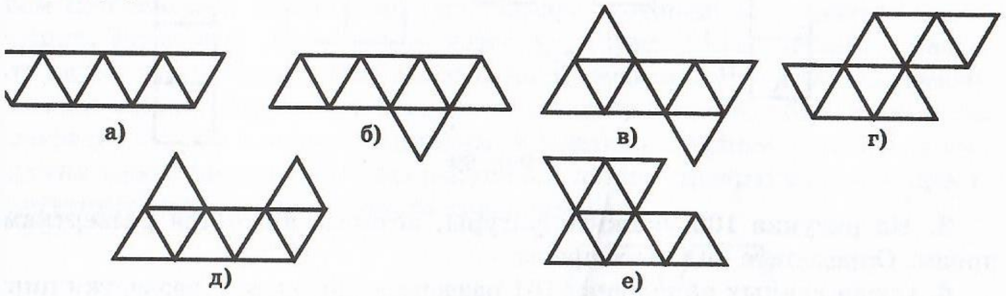


Рис. 102

13. КРИСТАЛЛЫ — ПРИРОДНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

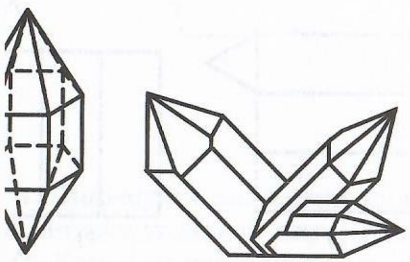


Рис. 103

Многие формы многогранников изобрел не сам человек, а их создала природа в виде кристаллов.

Например, кристаллы ***поваренной соли*** имеют форму куба, кристаллы льда и ***горного хрусталя*** (***кварца***) напоминают отточенный с двух сторон карандаш, т. е. имеют форму шестиугольной призмы, на основания которой поставлены шестиугольные пирамиды (рис. 103).

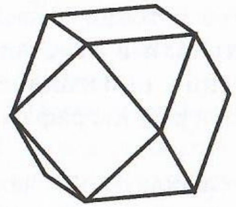


Рис. 104

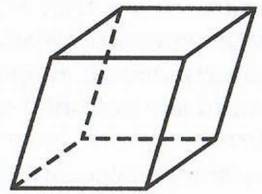


Рис. 105

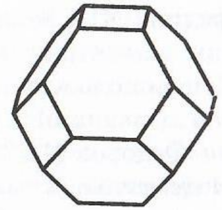


Рис. 106

Алмаз чаще всего встречается в виде октаэдра, иногда куба и даже кубооктаэдра (рис. 104).

Исландский шпат, который раздваивает изображение, имеет форму косого параллелепипеда (рис. 105).

Пирит — куб или октаэдр, иногда встречается в виде усеченного октаэдра (рис. 106).

Удивительное сходство кристаллов льда и горного хрусталя было подмечено очень давно. В древности и в средние века думали, что кристаллы льда и горного хрусталя — одно и то же, только лед замерзает у нас на глазах, а горный хрусталь лишь при особенно сильном морозе. Само слово «кристалл» происходит от греческого «кристаллос», т. е. лед.

В древности кристаллам приписывались всякие необыкновенные свойства. Считали, например, что кристалл аметиста предохраняет от пьянства и навевает счастливые сны, изумруд спасает мореплавателей от бурь, сапфир помогает при укусах скорпионов, алмаз бережет от болезней, топаз приносит счастье в ноябре, а гранат — в январе и т. д.

Конечно, раньше при недостаточном уровне развития науки невозможно было понять, как возникли кристаллы, почему они имеют форму многогранников, чем определяются их свойства.

Внешняя форма кристаллов — это лишь проявление их внутренних физических и химических свойств. С некоторыми из них вы знакомитесь на уроках физики и химии. Они объясняются особенностями геометрического строения кристаллов, в частности симметричным расположением атомов в кристаллической решетке.

Первые, еще смутные предположения о том, что атомы в кристаллах расположены правильным, закономерным, симметричным строем, высказывались в трудах различных естествоиспытателей уже в те времена, когда само понятие атома было неясным и не было никаких экспериментальных доказательств атомного строения вещества. Симметричная внешняя форма кристаллов невольно наводила на мысль о том, что внутреннее строение кристаллов должно быть симметричным и закономерным. Законы симметрии внешней формы кристаллов были полностью установлены

: середине XIX века, а к концу этого века были четко и точно выведены аконы симметрии, которым подчинены атомные постройки в кристаллах.

Основоположником математической теории строения кристаллов яв-:яется выдающийся российский математик и кристаллограф Евграф Степа-:ович Федоров (1853—1919).

Математика, химия, геология, минералогия, петрография, горное дело — каждую из этих областей внес Е. С. Федоров немалый вклад. С детских :ет он увлекался точными науками. В пять лет хорошо знал арифметику, в семь лет «для удовольствия» за два дня изучил учебник геометрии. :ын военного инженера и сам в молодости военный инженер, Е. С. Федо-ов оставил военную службу, чтобы целиком отдаться науке. Он снова по-тупил учиться, сначала в Военно-медицинскую академию, затем закон-ил Химико-технологический институт, наконец в 27 лет поступил в Пе-ербургский горный институт.

В 1890 году Е. С. Федоров строго математически вывел всевозможные еометрические законы сочетания элементов симметрии в кристалличе-ких структурах, иначе говоря, симметрии расположения частиц внутри ристаллов. Оказалось, что число таких законов ограничено. Е. С. Федо-ов показал, что имеется 230 пространственных групп симметрии, кото-ые впоследствии в честь ученого были названы федоровскими. Это был сполинский труд, предпринятый за 10 лет до открытия рентгеновских учей, за 27 лет до того, как с их помощью доказали существование самой ристаллической решетки. Существование 230 федоровских групп является дним из важнейших геометрических законов современной структурной ристаллографии. «Гигантский научный подвиг Е. С. Федорова, сумевшего одвести под единую геометрическую теорию весь природный "хаос" бесчис-енных кристаллообразований, и сейчас вызывает восхищение. "Царство кри-:аллов" является незыблемым памятником и конечной вершиной класси-еской федоровской кристаллографии», — сказал академик А. В. Шубников.

Е. С. Федоров установил, что красота внешних форм кристаллов под-иняется простым и строгим законам симметрии. Многие многогранники, режде всего правильные, полуправильные и звездчатые, по образному выра-:ению ученого, «буквально блещут симметрией».

Выясним, какие элементы симметрии имеют правильные многогран-ики.

Тетраэдр имеет:

1. Шесть плоскостей симметрии, каждая из которых проходит через :но ребро и середину противоположного ему ребра тетраэдра.

2. Три оси симметрии, проходящие через середины противоположных :бер.

3. Четыре оси симметрии 3-го порядка, проходящие через вершины тетраэдра и центры противоположных им граней.

Куб имеет:

1. Центр симметрии — центр куба.

2. Три плоскости симметрии, проходящие через середины параллельных ребер куба; шесть плоскостей симметрии, проходящих через противоположные ребра.

3. Шесть осей симметрии, проходящих через середины противоположных ребер; четыре оси симметрии 3-го порядка, проходящих через противоположные вершины; три оси симметрии 4-го порядка, проходящие через центры противоположных граней.

Октаэдр двойственен кубу, поэтому у него те же элементы симметрии с той лишь разницей, что плоскости и оси симметрии, проходящие у куба через вершины и центры граней, у октаэдра проходят наоборот — через центры граней и вершины.

Икосаэдр имеет:

1. Центр симметрии — центр икосаэдра.

2. Пятнадцать плоскостей симметрии, проходящих через противоположные ребра.

3. Пятнадцать осей симметрии, проходящих через середины противоположных ребер; десять осей симметрии 3-го порядка, проходящих через центры противоположных граней; шесть осей симметрии 5-го поряда, проходящих через противоположные вершины.

Додекаэдр двойственен икосаэдру, поэтому у него те же элементы симметрии с той лишь разницей, что плоскости и оси симметрии, проходящие у икосаэдра через вершины и центры граней, у додекаэдра проходят наоборот — через центры граней и вершины.

Рассмотрим еще один многогранник — ***ромбододекаэдр*** (иногда его называют ромбоидальный или ромбический додекаэдр) — двенадцатигранник, гранями которого являются равные ромбы (рис. 107).

Укажем способ его построения. Возьмем два одинаковых куба. Разобьем один из них на шесть равных четырехугольных пирамид с вершинами в центре куба и основаниями — гранями куба. Приложим теперь эти пирамиды к граням второго куба так, чтобы основания пирамид совместились с гранями куба (рис. 108). Легко видеть, что образовавшийся при этом многогранник будет ромбододекаэдром.

Форму этого многогранника создала природа в виде кристалла граната. Причем для граната настолько типичны двенадцатигранные кристаллы, что форма такого многогранника получила даже название гранатоэдра.

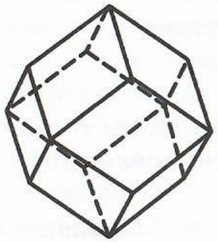


Рис. 107

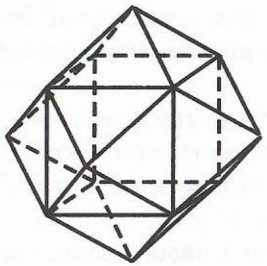


Рис. 108

Гранат — один из основных породообразующих минералов, встре-
:аются огромные скалы, которые сложены гранатовыми породами, называе-
ıыми скарнами. Однако драгоценные, красиво окрашенные и прозрачные
:амни встречаются далеко не часто. Несмотря на это, как раз именно гра-
ıат — кроваво-красный пироп — археологи считают самым древним ук-
ɔашением, так как он был обнаружен в Европе в древнем неолите на тер-
ɔитории современных Чехии и Словакии, где он и в настоящее время
ıользуется особой популярностью.

О том, что гранат, т. е. и ромбододекаэдр, был известен с глубокой древ-
ıости, можно судить по истории происхождения его названия, которое в
ıереводе с древнегреческого языка означало «красная краска». При этом
ıазвание связывалось с красным цветом — наиболее часто встречающейся
ɔкраской гранатов.

Гранат высоко ценится знатоками драгоценных камней. Он применяется
ıля изготовления первоклассных ювелирных изделий. До нас дошло опи-
ание древнейшего из известных крупных исторических ювелирных изде-
ıий — эфуда, нагрудника древнееврейских первосвященников (около
!000 лет до нашей эры), украшенного двенадцатью камнями, среди кото-
ɔых был и гранат.

Художественные изделия из гранатов были обнаружены в неополите
Èгипта и в могильниках додинастического периода (свыше двух тысяче-
ıетий до нашей эры).

В коллекциях Эрмитажа особым вниманием пользуются золотые украше-
ıия древних скифов. Необычайно тонка художественная работа золотых
ɜенков, диадем, сплетенных из листьев и веточек с плодами оливкового де-
ɔева и украшенных драгоценными красно-фиолетовыми гранатами.

Сохранились интересные письменные материалы, например, так назы-
ɜаемый «папирус Эберса», который содержит описание методов лечения кам-
ıями с особыми ритуалами и заклинаниями, где драгоценным камням припи-
ɪываются таинственные силы. Считалось, что кристалл граната приносит сча-
тье в январе. Это камень-талисман для людей, родившихся в этом месяце.

С драгоценными камнями связано много увлекательных преданий. Например, А. И. Куприн в повести «Гранатовый браслет» говорит о том, что гранат имеет свойство сообщать дар предвидения носящим его женщинам и отгоняет от них тяжелые мысли, мужчин же охраняет от насильственной смерти.

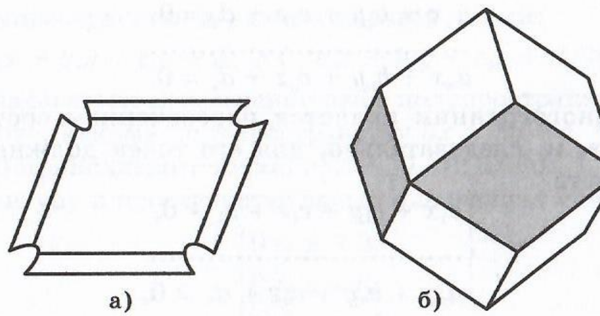
Гранаты подчеркивают необычность ситуации, неординарность поступков героев, подчеркивают чистоту и возвышенность их чувств. Тот же прием использован и в повести И. С. Тургенева «Вешние воды», где девушка дарит на память герою маленький гранатовый крестик.

Часто люди, рассматривая чудесные, сверкающие, переливающиеся многогранники кристаллов, не могут поверить, что их создала природа, а не человек. Именно поэтому родилось так много удивительных народных сказаний о кристаллах. Несколько таких легенд, рассказанных старыми уральскими мастерами, собрано П. П. Бажовым в сборнике «Малахитовая шкатулка». Известный любитель и знаток камня академик А. Е. Ферсман в книге «Рассказы о самоцветах» тоже поведал много народных легенд о драгоценных камнях. Он ярко и красочно повествует о том, какие красивые самоцветы находят у нас в России, в частности о месторождениях граната на Урале.

Упражнения

1. Найдите элементы симметрии кристаллов: а) горного хрусталя (кварца); б) алмаза в форме кубооктаэдра; в) пирита в форме усеченного октаэдра; г) граната в форме ромбододекаэдра.

2. Изготовьте модель ромбододекаэдра, используя геометрический конструктор, состоящий из двенадцати одинаковых ромбов. Длину ребра ромба возьмите, равной 6 см, острый угол приблизительно равен 71°, ширина клапана — 0,8 см (рис. 109, а). Модель лучше сделать двухцветной так, как показано на рисунке 109, б.



а) б)

Рис. 109

3. Плоскость, проходящая через центры соседних граней куба параллельно их общему ребру, отсекает от куба треугольную призму. Какой многогранник останется от куба, если провести все такие плоскости и отсечь от куба соответствующие призмы?

4. Найдите углы ромбов, являющихся гранями ромбододекаэдра.

5. Найдите ребро ромбододекаэдра, полученного из двух единичных кубов.

6. Найдите двугранные углы, образованные гранями ромбододекаэдра.

7. Чему равна площадь поверхности ромбододекаэдра, ребро которого равно 1?

8. Сколько красок потребуется для раскраски граней ромбододекаэдра так, чтобы соседние грани были окрашены в разные цвета?

9. Покажите, что из ромбододекаэдров можно составить пространственный паркет, заполняющий все пространство.

10. Из каких многогранников, кроме ромбододекаэдра, можно составить пространственный паркет?

11. Какой многогранник является двойственным к ромбододекаэдру?

14. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

Как известно из курса геометрии, плоскость в пространстве задается уравнением $ax + by + cz + d = 0$. При этом неравенства $ax + by + cz + d \geqslant 0$ и $ax + by + cz + d \leqslant 0$ определяют полупространства, на которые эта плоскость разбивает пространство. Для того чтобы определить, какому из двух полупространств принадлежит точка $A(x, y, z)$, достаточно подставить ее координаты в левую часть уравнения плоскости и найти знак получившегося значения.

Поменяв знаки у чисел a, b, c, d, второе неравенство всегда можно свести к первому.

Покажем, как с помощью таких неравенств в пространстве можно задавать выпуклые многогранники.

Действительно, пусть грани выпуклого многогранника лежат в плоскостях, задаваемых уравнениями:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$a_nx + b_ny + c_nz + d_n = 0.$$

Тогда сам многогранник является пересечением соответствующих полупространств, и, следовательно, для его точек должна выполняться система неравенств

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_nx + b_ny + c_nz + d_n \geqslant 0, \end{cases}$$

которая и определяет этот многогранник.

Например, неравенства

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x \leqslant 1,\ y \leqslant 1,\ z \leqslant 1,$$

которые можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 \leqslant z \leqslant 1, \end{cases}$$

определяют единичный куб в пространстве (рис. 110).

Если к этим неравенствам добавить еще одно неравенство

$$x + y + z \leqslant 2,$$

то соответствующий многогранник получается из куба отсечением пирамиды (рис. 111).

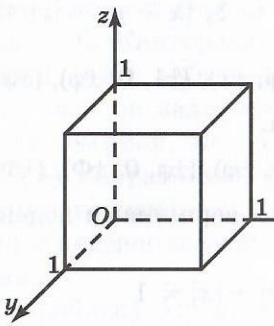


Рис. 110

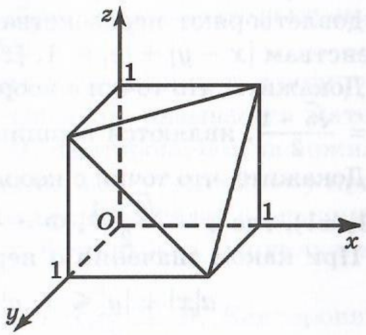


Рис. 111

Упражнения

1. Два полупространства задаются неравенствами:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \geqslant 0,\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \geqslant 0.$$

Как будет задаваться пересечение этих полупространств?

2. Определите, какому полупространству $5x + 3y - z - 2 \geqslant 0$ или $5x + 3y - z - 2 \leqslant 0$ принадлежит точка: а) $A(1, 0, 0)$; б) $B(0, 1, 0)$; в) $C(0, 0, 1)$.

3. Какую фигуру в пространстве задает следующая система неравенств

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant y \leqslant 5, \\ 0 \leqslant z \leqslant 4? \end{cases}$$

4. Изобразите многогранник, задаваемый неравенствами:

а) $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 8, \\ 0 \leqslant y \leqslant 8, \\ 0 \leqslant z \leqslant 8, \\ x + y + z \leqslant 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant y \leqslant 5, \\ 0 \leqslant z \leqslant 4, \\ x + y + z - 6 \geqslant 0. \end{cases}$

5. Найдите неравенства, задающие правильный тетраэдр, вершины которого имеют координаты: (1, 1, –1), (1, –1, 1), (–1, 1, 1), (–1, –1, –1).

6. Какая фигура в пространстве задается неравенством $|x| + |y| + |z| \leqslant a$?

7. Изобразите многогранники, задаваемые неравенствами:

а) $|x| + |y| + |z| \leqslant 4{,}5$; $|x| \leqslant 3$, $|y| \leqslant 3$, $|z| \leqslant 3$;

б) $|x| + |y| + |z| \leqslant 7$; $|x| \leqslant 3$, $|y| \leqslant 3$, $|z| \leqslant 3$;

в) $|x| + |y| + |z| \leqslant 6$; $|x| \leqslant 3$, $|y| \leqslant 3$, $|z| \leqslant 3$.

8. Изобразите многогранник, состоящий из точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $|x + y| + |z| \leqslant 1$, $|x - y| - |z| \leqslant 1$ или неравенствам $|x - y| + |z| \leqslant 1$, $|x + y| - |z| \leqslant 1$.

9. Докажите, что точки с координатами $(0, \pm\varphi, \pm1)$, $(\pm1, 0, \pm\varphi)$, $(\pm\varphi, \pm1, 0)$, где $\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, являются вершинами икосаэдра.

10. Докажите, что точки с координатами $(0, \pm\Phi, \pm\varphi)$, $(\pm\varphi, 0, \pm\Phi)$, $(\pm\Phi, \pm\varphi, 0)$, $(\pm1, \pm1, \pm1)$, где $\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, $\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, являются вершинами додекаэдра.

11. При каком значении a неравенства

$$a|x| + |y| \leqslant 1,\ a|y| + |z| \leqslant 1,\ a|z| + |x| \leqslant 1$$

задают додекаэдр?

12. При каком значении a неравенства

$$(1 - a)|x| + |y| \leqslant 1,\ (1 - a)|y| + |z| \leqslant 1,\ (1 - a)|z| + |x| \leqslant 1,$$
$$|x| + |y| + |z| \leqslant 1 + a$$

задают икосаэдр?

15. МНОГОГРАННИКИ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Ярким примером применения многогранников является их использование в теории оптимального управления.

Выпуклые многогранники можно трактовать аналитически — с помощью системы линейных неравенств. Линейная функция, рассматриваемая на таком выпуклом многограннике, достигает своего наибольшего (наименьшего) значения в одной из его вершин, либо на некотором ребре,

либо на некоторой грани. В любом случае существует вершина (хотя бы одна), в которой принимается это наибольшее (наименьшее) значение. Найти это наибольшее (наименьшее) значение можно алгебраически, найдя значения линейной функции во всех вершинах многогранника и выбрав из них наибольшее (наименьшее).

Оказалось, что к данной задаче отыскания наибольшего (наименьшего) значения линейной функции на многограннике приводят многие практические задачи. Среди них:

транспортная задача о составлении оптимального способа перевозок грузов;

задача о диете, т. е. о составлении наиболее экономного рациона питания, удовлетворяющего определенным медицинским требованиям;

задача составления оптимального плана производства;

задача рационального использования посевных площадей и т. д.

Несмотря на различные содержательные ситуации в этих задачах, математические модели, их описывающие, имеют много общего, и все они решаются одним и тем же методом, разработанным отечественным математиком Л. В. Канторовичем (1912—1986).

В своей книге «Математические методы организации и планирования производства» он заложил основы того, что ныне называется математической экономикой. Методы, развитые Л. В. Канторовичем, положили начало новому направлению прикладной математики — линейному программированию, изучающему численные методы решения задач отыскания наибольших и наименьших значений линейных функций на выпуклых многогранниках.

За разработку этого направления в 1975 году Л. В. Канторович был удостоен Нобелевской премии.

В качестве примера рассмотрим упрощенный вариант транспортной задачи.

Задача. Пусть на четыре завода $З_1$, $З_2$, $З_3$, $З_4$ требуется завезти сырье одинакового вида, которое хранится на двух складах $С_1$, $С_2$. Потребность данных заводов в сырье каждого вида указана в таблице 1, а расстояние от склада до завода — в таблице 2. Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т. е. такой, при котором общее число тонно-километров наименьшее.

Таблица 1

Наличие сырья на складе (т)		Потребность в сырье на заводе (т)			
$С_1$	$С_2$	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
20	25	8	10	12	15

Таблица 2

Склад	Расстояние от склада до завода (км)			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$	5	6	4	10
$С_2$	3	7	3	7

Решение. В первую очередь проанализируем условие задачи и переведем его на язык математики, т. е. составим математическую модель. Для этого количество сырья, которое нужно перевезти со склада $С_1$ на заводы $З_1$, $З_2$, $З_3$, обозначим через x, y и z соответственно. Тогда на четвертый завод с этого склада нужно будет перевезти $20 - x - y - z$ сырья в тоннах, а со второго склада нужно будет перевезти соответственно $8 - x$, $10 - y$, $12 - z$, $x + y + z - 5$ сырья в тоннах. Запишем эти данные в таблицу 3.

Таблица 3

Склад	Кол-во сырья, перевезенного на заводы (т)			
	$З_1$	$З_2$	$З_3$	$З_4$
$С_1$	x	y	z	$20-x-y-z$
$С_2$	$8-x$	$10-y$	$12-z$	$x+y+z-5$

Поскольку все величины, входящие в эту таблицу, должны быть неотрицательными, получим следующую систему неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0, \\ 8 - x \geqslant 0,\ 10 - y \geqslant 0,\ 12 - z \geqslant 0, \\ 20 - x - y - z \geqslant 0, \\ x + y + z - 5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Эта система неравенств определяет некоторый многогранник. Для того чтобы его построить, изобразим сначала многогранник, определяемый первой и второй строками данной системы. На рисунке 112 это параллелепипед $ABCO_1A_1B_1C_1$. Уравнение $20 - x - y - z = 0$ определяет плоскость $D_1D_2D_3$, которая, пересекая параллелепипед, образует многоугольник $M_1M_2M_3C_1$. Уравнение $x + y + z - 5 = 0$ определяет плоскость, которая пересекает параллелепипед и образует в нем треугольник $E_1E_2E_3$. На многограннике $M_1M_2M_3C_1CBAE_1E_2E_3O_1$, где $M_1(8, 10, 2)$, $M_2(0, 10, 10)$, $M_3(0, 8, 12)$, $C_1(8, 0, 12)$, $C(8, 0, 0)$, $B(8, 10, 0)$, $A(0, 10, 0)$, $E_1(5, 0, 0)$, $E_2(0, 5, 0)$, $E_3(0, 0, 5)$, $O_1(0, 0, 12)$, выполняются все условия данной системы. Назовем его многогранником ограничений.

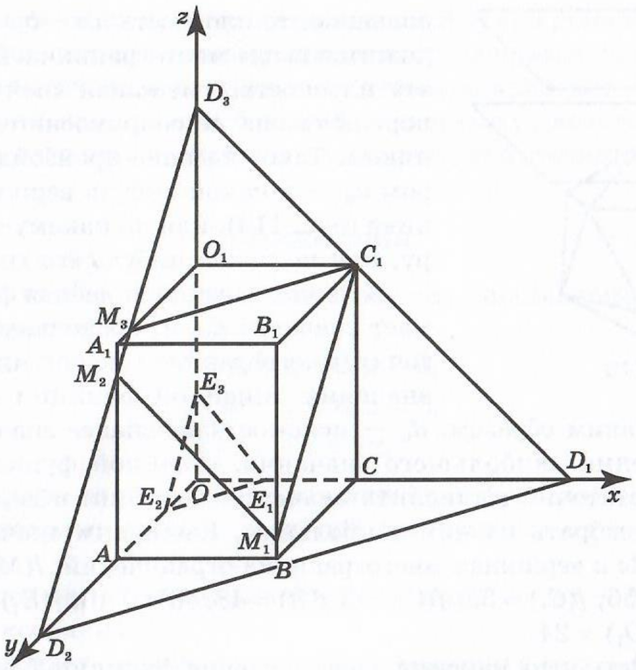


Рис. 112

Для нахождения общего числа тонно-километров умножим расстояния от складов до заводов на перевозимое количество сырья и полученные результаты сложим. Общее число тонно-километров выражается формулой:

$$5x + 6y + 4z + 10(20 - x - y - z) + 3(8 - x) + 7(10 - y) + \\ + 3(12 - z) + 7(x + y + z - 5) = 295 - x - 4y - 2z.$$

Таким образом, задача сводится к отысканию наименьшего значения функции $F = 295 - x - 4y - 2z$ на многограннике ограничений. Для этого достаточно найти наибольшее значение функции $f = x + 4y + 2z$. Тогда $F_{\min} = 295 - f_{\max}$.

Используя геометрические соображения, докажем, что линейная функция вида $ax + by + cz$ $(c > 0)$ принимает свое наибольшее значение на многограннике в одной из его вершин.

Зафиксируем какое-нибудь значение d функции $ax + by + cz$. Тогда уравнение $ax + by + cz = d$ задает плоскость в пространстве, которая характеризуется тем, что во всех ее точках данная линейная функция принимает значение d. В точках, расположенных выше этой плоскости, она принимает значения, большие d, а в точках, расположенных ниже этой плоскости, — значения, меньшие d. Если число d выбрать достаточно

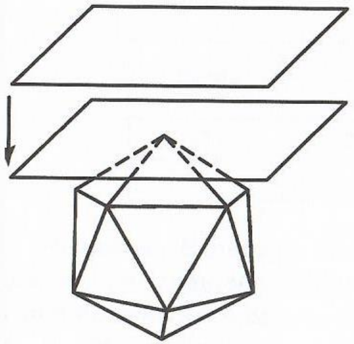


Рис. 113

большим, то плоскость $ax + by + cz = d$ расположится выше многогранника. Будем опускать эту плоскость, уменьшая значения d, до тех пор, пока она не соприкоснется с многогранником. Такое касание произойдет при некотором d_0 — в какой-нибудь вершине многогранника (рис. 113), или по какому-нибудь его ребру, или по какой-нибудь его грани.

В точках касания линейная функция принимает значение d_0, и, поскольку все остальные точки многогранника лежат ниже плоскости, значения линейной функции в этих точках меньше d_0. Таким образом, d_0 — искомое наибольшее значение. Поэтому для нахождения наибольшего значения линейной функции на многограннике достаточно вычислить значения функции в вершинах многогранника и выбрать из них наибольшее. Вычислим значение функции $f = x + 4y + 2z$ в вершинах многогранника ограничений: $f(M_1) = 52$, $f(M_2) = 60$, $f(M_3) = 56$, $f(C_1) = 32$, $f(C) = 8$, $f(B) = 48$, $f(A) = 40$, $f(E_1) = 5$, $f(E_2) = 20$, $f(E_3) = 10$, $f(O_1) = 24$.

Легко видеть, что максимальное значение функции f равно 60. Тогда $F_{\min} = 295 - 60 = 235$. Это значение функция F принимает в точке $M_2(0, 10, 10)$.

Таким образом, наиболее выгодный вариант перевозок задается таблицей 4.

Таблица 4

Склад	Кол-во сырья, перевезенного на заводы (т)			
	З$_1$	З$_2$	З$_3$	З$_4$
С$_1$	0	10	10	0
С$_2$	8	0	2	15

Заметим, что число независимых переменных в этой задаче было равно трем и поэтому в процессе ее решения получился многогранник. Если бы число независимых переменных равнялось двум, то получился бы многоугольник. В реальных задачах число независимых переменных значительно больше трех, и для получения геометрической интерпретации этих задач требуется рассмотрение n-мерного пространства и n-мерных многогранников с очень большим n. При решении таких задач используются электронно-вычислительные машины.

Таким образом, хотя пространственные свойства окружающего нас мира хорошо описываются геометрическим трехмерным пространством, потребности практической деятельности человека приводят к необходимости рассмотрения пространств большей размерности, которые изучаются в специальном разделе математики — многомерной геометрии.

Упражнения

1. Найдите множество точек пространства, определяемое следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0, \\ x \leqslant 8,\ y \leqslant 8,\ z \leqslant 8, \\ x + y + z \leqslant 12. \end{cases}$$

2. Какая фигура является графиком линейной функции $z = ax + by + c$?

3. Как расположен график линейной функции $z = ax + c$ по отношению к оси Oy?

4. Как расположен график линейной функции $z = ax + by$ по отношению к началу координат?

5. Что произойдет с графиком линейной функции $z = ax + by + c$, если c: а) увеличить на единицу; б) уменьшить на единицу?

6. Пусть математическая модель некоторой задачи представляется следующей системой ограничений:

$$\begin{cases} x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 2 + 2x + y \geqslant 0, \\ 2 - x + y \geqslant 0, \\ 5 - x - y \geqslant 0. \end{cases}$$

На множестве решений этой системы найдите наименьшее значение функции $F = y - x$.

7. Докажите, что коэффициенты a и b в уравнении линейной функции $z = ax + by + c$ являются тангенсами углов между графиком этой функции и осями Ox и Oy соответственно.

8. Найдите угол между графиком линейной функции $z = ax + by + c$ и плоскостью Oxy.

9. На трех складах хранится сырье одинакового вида в количествах соответственно 10 т, 20 т, 30 т. На завод нужно завезти 35 т сырья. Найдите наиболее выгодный вариант перевозок, если расстояния от складов до завода равны 7 км, 5 км, 8 км.

10. Решите предыдущую задачу при дополнительном требовании: со второго склада вывозится сырья не больше, чем с третьего.

11. Установка собирается из трех различных деталей А, Б, В. На одном станке можно за смену изготовить либо 12 деталей типа А, 18 — типа Б и 30 типа В (первый режим), либо 20 деталей типа А, 15 — типа Б и 9 — типа В (второй режим). Хватит ли ста станков, чтобы изготовить за смену детали для 720 установок? Какое наименьшее число станков (и с какими режимами работы) нужно для выполнения заказа?

16. ИЗОБРАЖЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ В КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЕ «МАТЕМАТИКА»

Компьютерная программа «Математика» разработана в начале 90-х годов прошлого века и позволяет производить различные символьные операции, включающие операции дифференцирования, интегрирования и т. д. Ее важной составной частью является развитая компьютерная графика, позволяющая получать изображения многогранников, поверхностей и других пространственных фигур.

Рассмотрим вопрос об изображении правильных многогранников. В качестве первого примера возьмем додекаэдр. Для получения изображения додекаэдра после того, как вы вошли в программу, нужно набрать

<<Graphics"Polyhedra"
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[p]

После этого следует нажать клавиши SHIFT и ENTER. В результате на экране появится цветное изображение додекаэдра, заключенного в каркасный куб (рис. 114).

Если вы хотите убрать куб, то к команде, которую вы набрали, следует добавить

Boxed->False

В результате получится команда

<<Graphics"Polyhedra"
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[p,Boxed->False]

Нажатие клавиш SHIFT и ENTER приводит к исполнению этой команды. На экране получим изображение додекаэдра (рис. 115).

Изображение додекаэдра можно увеличивать и уменьшать так же, как это делалось для графиков функций.

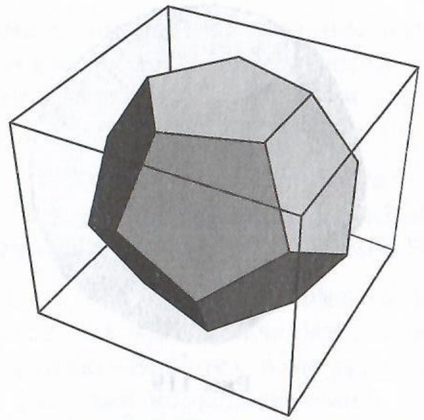


Рис. 114

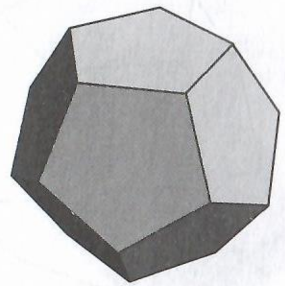


Рис. 115

Изображение додекаэдра можно поворачивать, задавая координаты точки, из которой мы смотрим на додекаэдр. По умолчанию предполагается точка с координатами (1.3,—2.4,2). Если вы хотите указать другую точку, то к набранной команде следует добавить, например,

ViewPoint->{0.8,-2.4,2}

В результате получим команду

<<Graphics"Polyhedra"
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[p,Boxed->False,ViewPoint->{0.8,-2.4,2}],

исполнение которой приводит к рисунку 116. Команда

<<Graphics"Polyhedra"
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[p,Boxed->False,ViewPoint->{0.8,-2.4,1}]

приведет к рисунку 117.

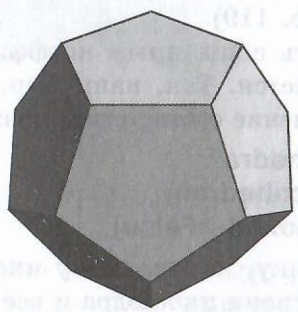


Рис. 116

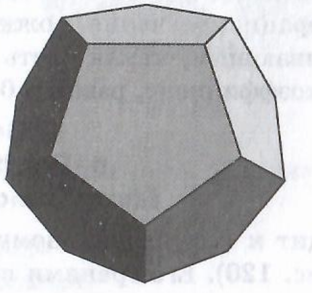


Рис. 117

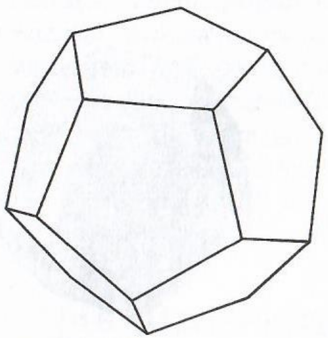


Рис. 118

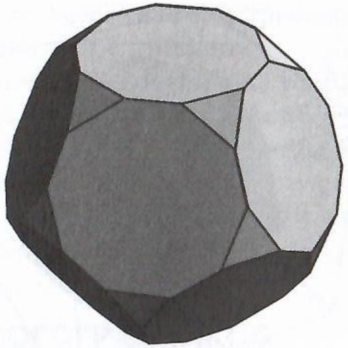


Рис. 119

Для устранения окраски граней додекаэдра следует добавить

Shading->False

В результате получим команду

<<Graphics"Polyhedra"
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[p,Boxed->False,Shading->False],

исполнение которой приведет к рисунку 118.

Если вместо **Dodecahedron** написать соответственно **Tetrahedron**, **Hexahedron**, **Octahedron**, **Icosahedron**, то получим изображения тетраэдра, куба, октаэдра и икосаэдра.

В программе «Математика» имеется операция «Truncate», при которой от правильных многогранников отсекаются углы и в результате получаются полуправильные многогранники. Так, например, исполнение команды

<<Graphics"Polyhedra"
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[Truncate[p],Boxed->False]

приводит к усеченному додекаэдру (рис. 119).

Операцию усечения можно производить с заданным коэффициентом, показывающим, какая часть ребра отсекается. Так, например, если выбрать коэффициент, равным 0.5 , то исполнение соответствующей команды

<<Graphics"Polyhedra"
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[Truncate[p,0.5],Boxed->False]

приводит к полуправильному многограннику, называемому икосододекаэдр (рис. 120). Его гранями являются все грани икосаэдра и все грани додекаэдра.

Помимо операции усечения, в программе «Математика» имеется операция «Stellate», которая приводит к звездчатым многогранникам. Так, например, исполнение команды

<<Graphics"Polyhedra"
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[Stellate[p,2.2],Boxed->False]

приводит к многограннику (рис. 121), который называется малым звездчатым додекаэдром.

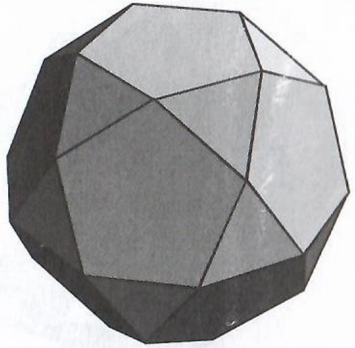


Рис. 120

Операцию «Stellate» тоже можно производить с разными коэффициентами. Если коэффициент меньше единицы, то она производится вовнутрь многогранника. Например, исполнение команды

<<Graphics"Polyhedra"
p=Polyhedron[Icosahedron]
Show[Stellate[p,0.7],Boxed->False]

приводит к многограннику (рис. 122), который называется большим додекаэдром.

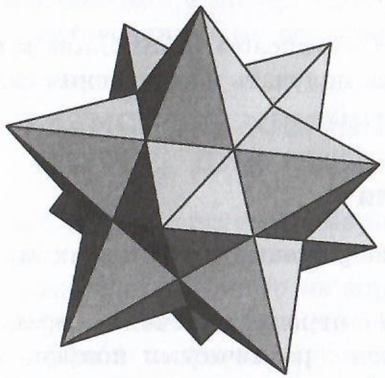


Рис. 121

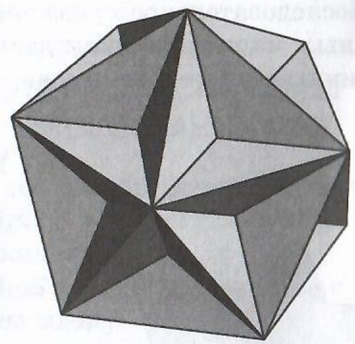


Рис. 122

Операции «Truncate» и «Stellate» можно комбинировать. Например, команда

<<Graphics"Polyhedra"
p=Polyhedron[Icosahedron]
Show[Truncate[Stellate[p,0.7],0.5],Boxed->False]

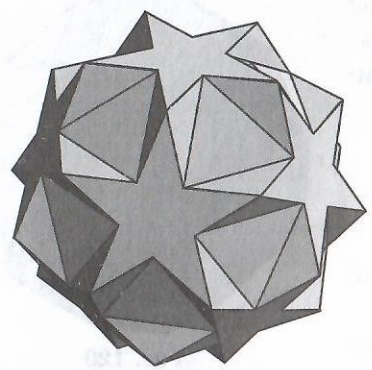


Рис. 123

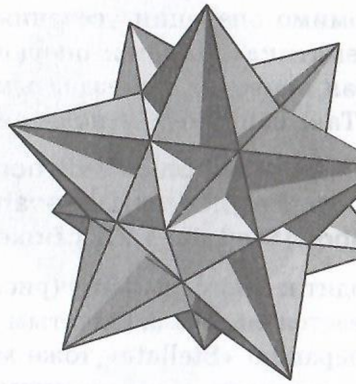


Рис. 124

риводит к многограннику (рис. 123), который называется малый битри-онaльный икосододекаэдр.

Команда

<<Graphics"Polyhedra"
p=Polyhedron[Dodecahedron]
Show[Stellate[Stellate[p,2.2],0.5],Boxed->False]

приводит к многограннику (рис. 124), который называется большим косаэдром.

Последовательное применение операций «Truncate» и «Stellate» к правильным многогранникам дает возможность получать изображения самых азличных многогранников.

Упражнения

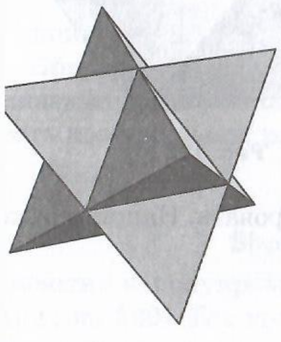


Рис. 125

1. Получите изображения правильных многогранников.

2. Произведите операцию усечения правильных многогранников с различными коэффициентами.

3. Почему при образовании малого звездчатого додекаэдра использовался коэффициент 2.2?

4. Почему при образовании большого додекаэдра использовался коэффициент 0.7?

5. Получите изображение многогранника (рис. 125), который называется звездой Кеплера («Stella octangula»).

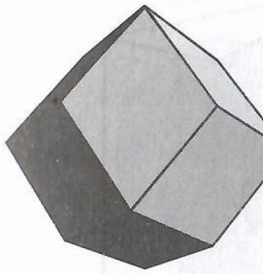


Рис. 126

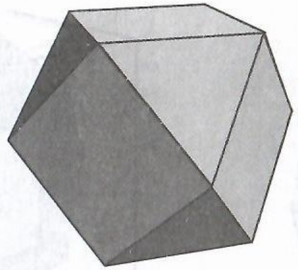


Рис. 127

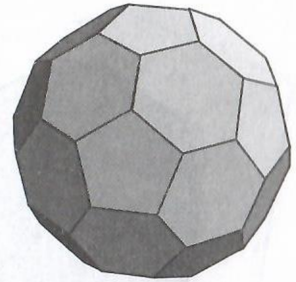


Рис. 128

6. Как получить изображение многогранника (рис. 126), который называется ромбододекаэдром? Его гранями являются 12 ромбов. (Форму ромбододекаэдра имеет кристалл граната.)

7. Как из тетраэдра получить октаэдр?

8. Кубооктаэдр имеет своими гранями восемь правильных треугольников и шесть квадратов. Получите изображение этого многогранника (рис. 127).

9. Можно ли получить икосододекаэдр (рис. 120) из икосаэдра?

10. Поверхность футбольного мяча представляет собой поверхность полуправильного многогранника, гранями которого являются правильные шестиугольники и пятиугольники (рис. 128). Усечением какого правильного многогранника он получается?

17. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ «MAPLE» ДЛЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

Рассмотрим систему «Maple», аналогичную компьютерной системе «Математика», которая позволяет легко получать изображения различных пространственных фигур на экране монитора.

Для получения изображения многогранников после того, как вы открыли окно и вошли в программу, нужно набрать команду

with(geom3d):

и нажать клавишу ENTER. В результате подгружается пакет программ, относящихся к трехмерной графике.

Затем нужно задать центр многогранника и размеры. Для этого можно набрать

point(o,0,0,0): r = 1.;

и нажать ENTER.

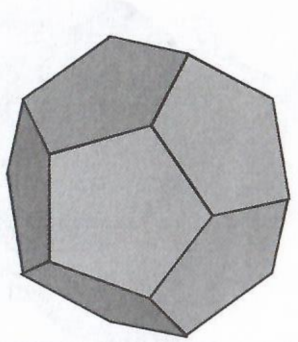


Рис. 129

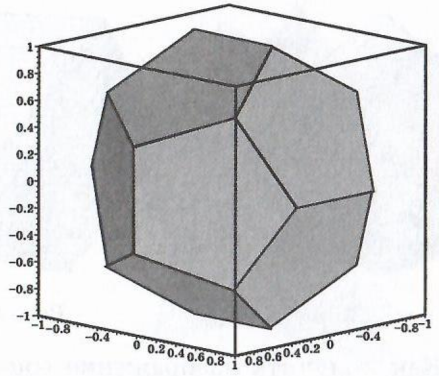


Рис. 130

Точка o(0,0,0) будет центром многогранника, r = 1. — радиус описан-
:ой сферы.

Теперь для создания требуемого многогранника нужно набрать его
:азвание, например,

dodecahedron(d,o,r);

Буква d является обозначением додекаэдра с центром o и радиусом
писанной сферы r.

Наконец для получения изображения додекаэдра нужно набрать

draw(p);

: нажать Enter. В результате на экране появится цветное изображение
одекаэдра (рис. 129). Его можно поворачивать с помощью мышки так,
:ак будто это пространственный объект.

Цвет многогранника можно менять или убрать его совсем. Для этого
Меню нужно нажать окно Color и выбрать нужную раскраску.

Нажав в Меню окно Axes и выбрав Boxed, можно заключить изображе-
ие додекаэдра в координатный куб (рис. 130). Это же можно сделать,
аписав вместо **draw(p)**; команду **draw(p, axes=boxed);**

Изображение многогранника обычно соответствует ортогональному
роектированию. Однако можно использовать и центральное проектиро-
ание с центром проектирования, расположенным на различном расстоя-
ии от объекта. Для этого в Меню нужно нажать окно Projection и соот-
етственно выбрать: а) Far Perspective; б) Medium Perspective; в) Near Pers-
ective. При этом мы получим изображение, удаленное от объекта: а) далеко;
) на среднем расстоянии; в) близко. Если подобную процедуру мы проде-
аем с додекаэдром, то получим такие изображения, как на рис. 131—
33. Степень удаленности центра проектирования от объекта можно

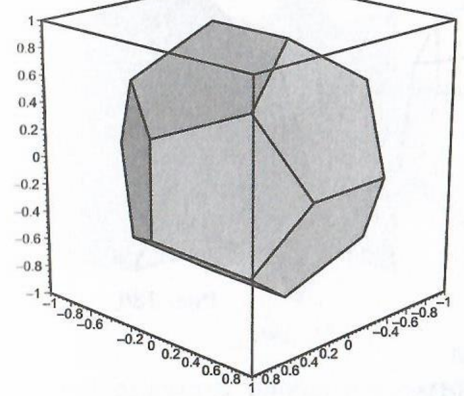


Рис. 131

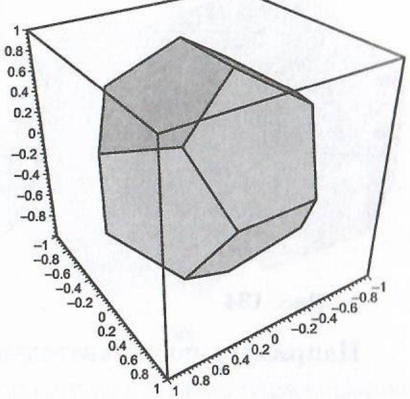


Рис. 132

выбрать, указав соответствующее число от 0 до 1, например, выполнение команды **draw(p, projection=0.5);** приводит к изображению, удаленному от центра проектирования на среднее расстояние.

Можно регулировать толщину линий, изображающих ребра многогранника. Для этого нужно нажать на окно Style и в нем Line Width и после этого выбрать толщину линий. На рисунке 134 линии выбраны толстыми. Это же можно сделать, непосредственно указав толщину линии, например, **draw(p, thickness=2);**

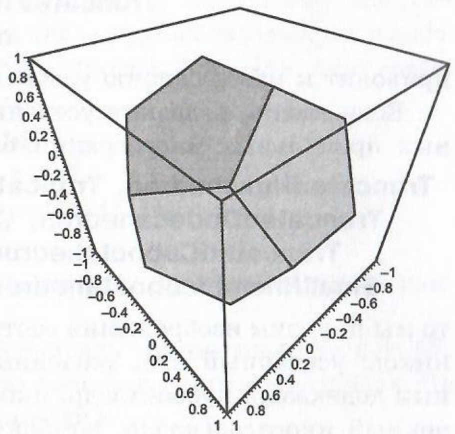


Рис. 133

Если в меню выбрать окно Style и в нем Wireframe, то получим изображение только ребер многогранника (рис. 135). Это же можно получить, выполнив команду **draw(p, style=wireframe);**

Если вместо **dodecahedron** мы напишем: а) **tetrahedron**; б) **hexahedron**; в) **octahedron**; г) **icosahedron**; то получим изображения соответственно: а) тетраэдра; б) куба; в) октаэдра; г) икосаэдра.

С этими изображениями можно проводить все операции, рассмотренные выше.

Для получения изображений полуправильных многогранников нужно вместо названия правильного многогранника написать название полуправильного многогранника.

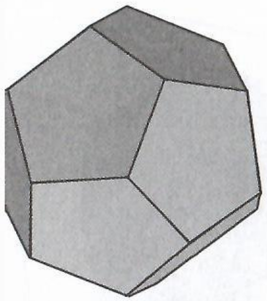


Рис. 134

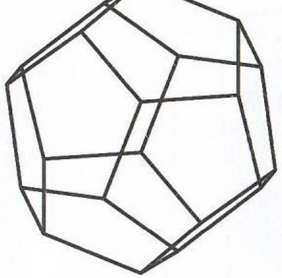


Рис. 135

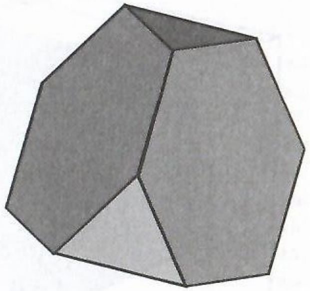


Рис. 136

Например, последовательность команд

with(geom3d):
point(o,0,0,0): r = 1.;
TruncatedTetrahedron(p1,o,r);
draw(p1);

риводит к изображению усеченного тетраэдра (рис. 136).

Если вместо названия усеченного тетраэдра написать названия осталь-ых правильных многогранников:

TruncatedHexahedron, TruncatedOctahedron, TruncatedIcosahedron, TruncatedDodecahedron, Cuboctahedron, Icosidodecahedron, TruncatedCuboctahedron, TruncatedIcosidodecahedron, SmallRhombicuboctahedron, SmallRhombiicosidodecahedron,

о мы получим изображения соответствующих полуправильных многогран-иков: усеченный куб, усеченный октаэдр, усеченный икосаэдр, усечен-ый додекаэдр, кубооктаэдр, икосододекаэдр, усеченный кубооктаэдр, усе-енный икосододекаэдр, ромбокубооктаэдр, ромбоикосододекаэдр.

Для получения изображений звездчатых многогранников нужно в на-ор команд включить название звездчатого многогранника. Например, оследовательность команд

with(geom3d):
point(o,0,0,0): r = 1.;
SmallStellatedDodecahedron(s1,o,r);
draw(s1);

риводит к изображению малого звездчатого додекаэдра (рис. 137).

Если вместо названия малого звездчатого додекаэдра написать назва-ия остальных правильных звездчатых многогранников:

GreatStellatedDodecahedron, GreatDodecahedron, GreatIcosahedron,

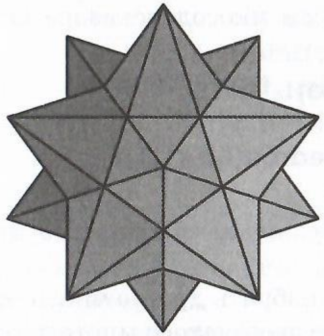


Рис. 137

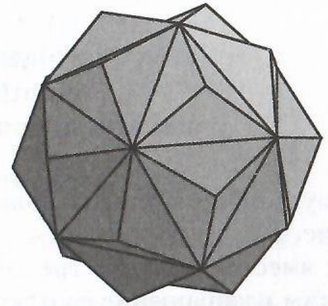


Рис. 138

то мы получим изображения правильных звездчатых многогранников: большой звездчатый додекаэдр, большой додекаэдр, большой икосаэдр.

Помимо правильных звездчатых многогранников программа «Maple» позволяет получать изображения большого числа других звездчатых много-гранников. Среди них 58 форм звездчатых икосаэдров. Для получения первой звездчатой формы следует набрать

with(geom3d):
point(o,0,0,0): r = 1.;
stellate(si,icosahedron(i,o,r),1);
draw(si);

В результате на экране появится изображение звездчатого многогран-ника (рис. 138).

Если вместо числа 1 в третьей строчке набрать другое число от 1 до 58, то получим изображение соответствующего звездчатого многогранника. На рисунках 83 приведены некоторые изображения.

Помимо звездчатых икосаэдров имеются 4 звездчатые формы кубо-октаэдра и 18 звездчатых форм икосододекаэдра.

Для получения первой звездчатой формы кубооктаэдра следует набрать

with(geom3d):
point(o,0,0,0): r = 1.;
stellate(si,cuboctahedron(i,o,r),1);
draw(si);

В результате на экране появится изображение звездчатого многогран-ника (рис. 81, а).

Если вместо числа 1 в третьей строчке набрать другое число от 1 до 4, то получим изображение соответствующего звездчатого многогранника. На рисунках 81 приведены соответствующие изображения.

Для получения первой звездчатой формы икосододекаэдра следует набрать

```
with(geom3d):
point(o,0,0,0): r = 1.;
stellate(si,icosidodecahedron(i,o,r),1);
draw(si);
```

В результате на экране появится изображение звездчатого многогранника (рис. 82, а).

Если вместо числа 1 в третьей строчке набрать другое число от 1 до 18, то получим изображение соответствующего звездчатого многогранника. На рисунках 82 приведены некоторые изображения.

Программа «Maple» позволяет получать изображения двойственных многогранников, т. е. таких, центры граней которых являются вершинами исходных многогранников. Например, многогранником, двойственным кубу, является октаэдр, многогранником, двойственным икосаэдру, является додекаэдр.

На рисунках 75 представлены изображения многогранников, двойственных полуправильным многогранникам, полученные с помощью программы «Maple». Их гранями являются равные (неправильные) многоугольники.

Для получения этих изображений нужно в набор команд включить команду создания двойственного многогранника. Например, для получения изображения многогранника, двойственного к усеченному тетраэдру, вместе с самим усеченным тетраэдром (рис. 75, а) нужно выполнить следующую последовательность команд:

```
with(geom3d):
point(o,0,0,0): r = 1.;
duality(dp1,TruncatedTetrahedron(p1,o,r),1);
draw([dp1(color=red,style=wireframe),p1(color=green)]);
```

При этом усеченный тетраэдр будет изображен зеленым цветом, а ребра двойственного многогранника — красным. Если же вместо последней строчки в этих командах мы напишем

```
draw([dp1,(color=red),p1(color=green)] ,style=wireframe);
```

то получим изображение реберного зеленого усеченного тетраэдра вместе с описанным около него красным реберным двойственным многогранником.

Если мы хотим получить изображение одного двойственного многогранника, например ромбододекаэдра (рис. 75, е) без исходного полуправильного (кубооктаэдра), то нужно выполнить последовательность команд


```
with(geom3d):
point(o,0,0,0): r = 1.;
duality(dp1,cuboctahedron(p1,o,r),1);
draw(dp1);
```

Упражнения

1. Получите изображения правильных многогранников: а) цветные; б) зеленые; в) реберные.

2. Получите изображение куба в случаях, когда центр проектирования расположен от куба: а) далеко; б) на среднем расстоянии; в) близко.

3. Получите изображения полуправильных многогранников.

4. Получите изображения правильных звездчатых многогранников.

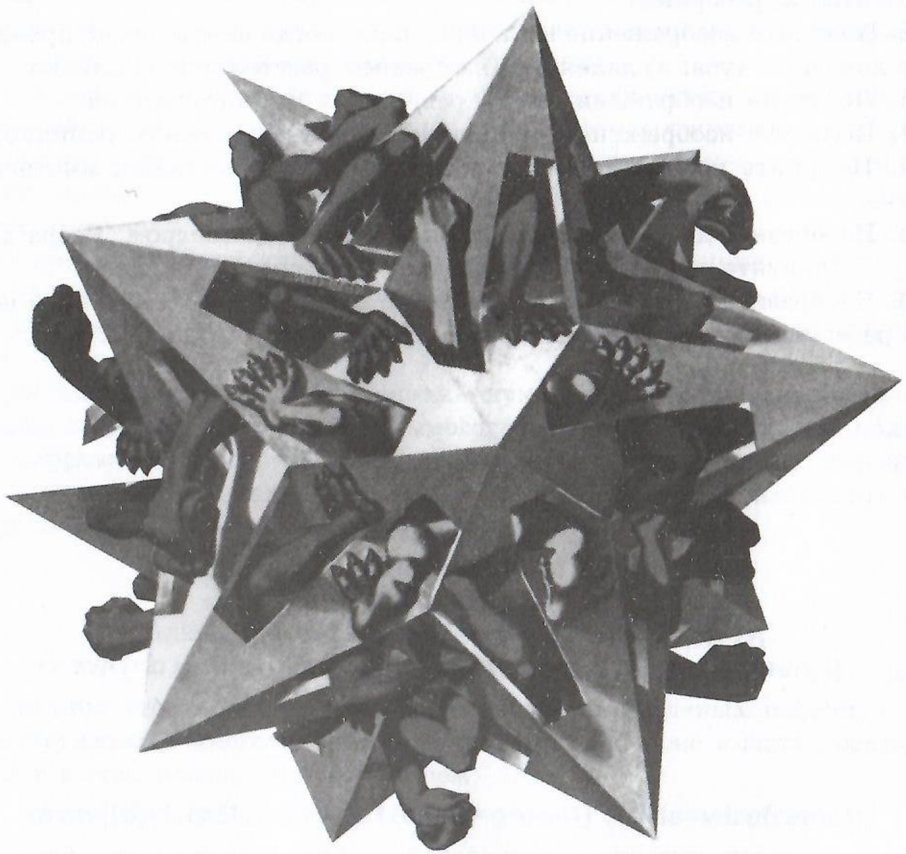
5. Получите изображения равногранно полуправильных многогранников.

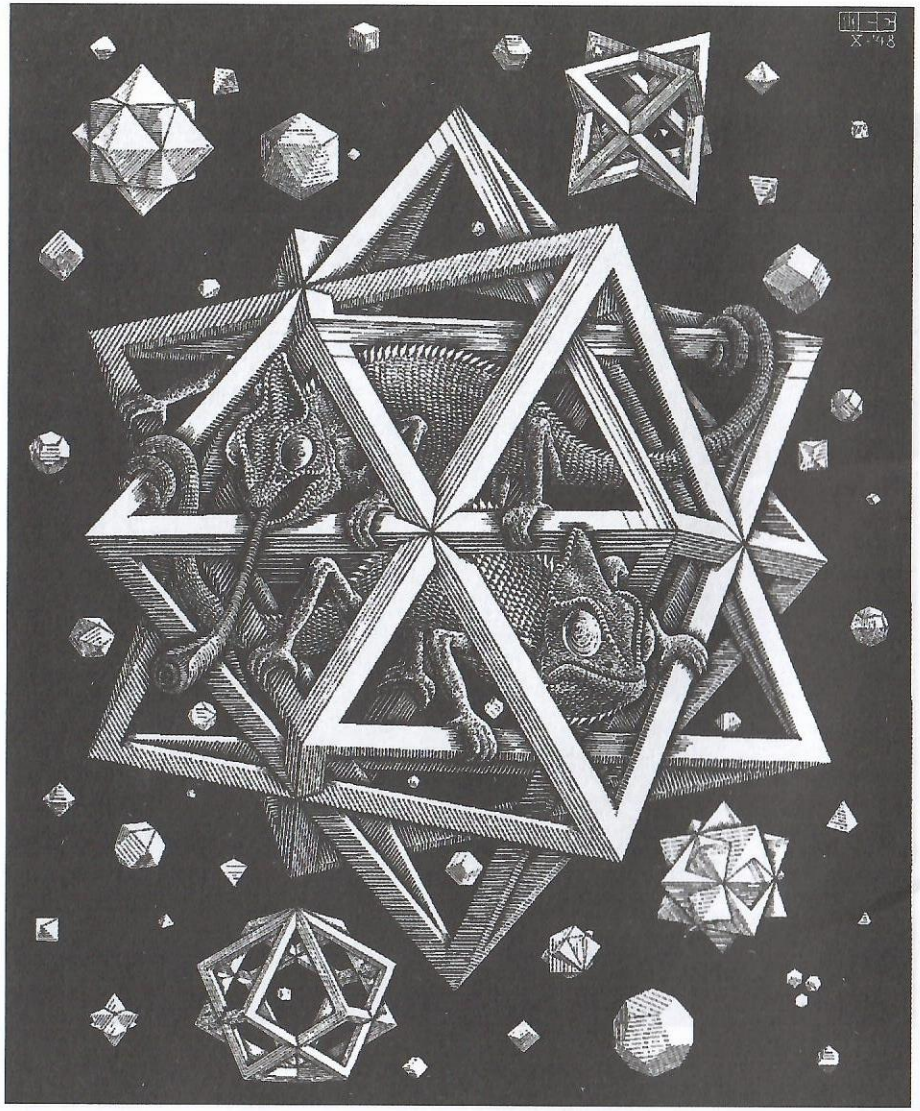
6. Изобразите додекаэдр с вписанным в него икосаэдром. Ребра додекаэдра нарисуйте зелеными, а икосаэдра — красными.

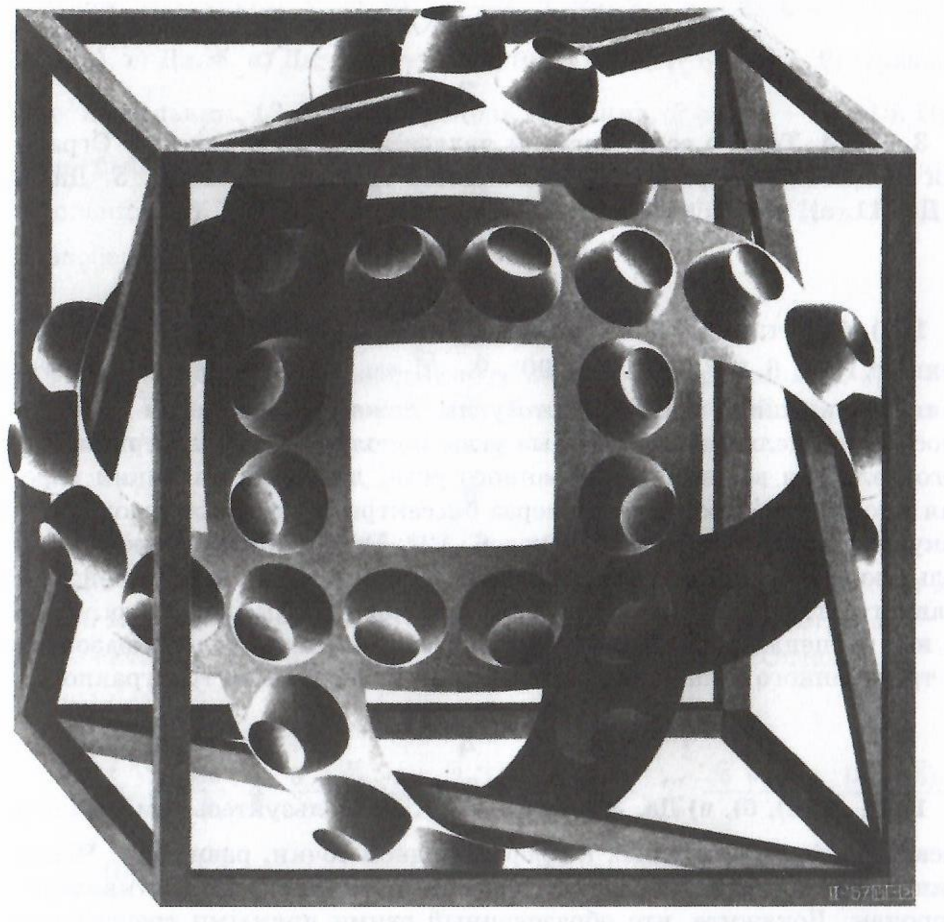
7. Изобразите зеленый октаэдр вместе с описанным около него красным реберным кубом. Толщину ребер куба возьмите равной 2.

Приложение

Предлагаем вашему вниманию несколько картин М. Эшера, посвященных многогранникам.




X-'48



ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

2

3. Да. 4. Только если фигурой является все пространство. Ограничен-ая непустая фигура обязательно имеет граничные точки. 5. Да. 6. а),) Да. 11. а), б). 12. а). 13. а), б) нет.

3

1. а), б) Нет; в) да. 2. а) Тетраэдр; б) куб; в) додекаэдр. 4. Больше 10° и еньше 150°. 6. 90°. 7. 60°. 8. 90°. 9. $\sqrt{6}$ см. 10. Луч, вершиной которого вляется вершина трехгранного угла, лежащий на линии пересечения лоскостей, делящих двугранные углы пополам. 11. Луч, вершиной кото-ого является вершина трехгранного угла, лежащий на линии пересече-ия плоскостей, проходящих через биссектрисы плоских углов и перпен-икулярных плоскостям этих углов. 12*. Рассмотрите плоскость, парал-ельную линиям пересечения плоскостей противоположных граней четырех-ранного угла. 13*. Возьмите точку внутри трехгранного угла. Опустите з нее перпендикуляры на грани. Сравните плоские углы образовавшего-я трехгранного угла с двугранными углами исходного трехгранного угла.

4

1. $\frac{\sqrt{6}}{12}$. 2. а), б), в) Да. 3. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. 6. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 7. Воспользуйтесь тем, что отрезки асательных, проведенных к сфере из одной точки, равны. 9*. Через вер-ины треугольника проведите прямые, параллельные противолежащим оронам. Докажите, что образованный этими прямыми треугольник яв-яется разверткой искомого тетраэдра. 10*. Воспользуйтесь теоремой Пи-агора и формулой Герона.

5

1. б), д) — Выпуклые; а), в), г) — невыпуклые. 2. Пространственный рест. 3. Нет. 7. Нет. 8. Да, призма. 9. Да. 10. а), б) Пирамиды. 11. Число

плоских углов равно удвоенному числу ребер. 12. Воспользуйтесь тем, что в каждой вершине многогранника сходится не менее трех ребер. 13. Воспользуйтесь тем, что каждая грань многогранника имеет не менее трех ребер.

6

1. Многоугольником. 2. а), б) $\frac{n(n-3)}{2}$. 3. $2n$; $3n$; $n + 2$. 4. а), б), в) Да. 5. а), б), в), г) Да. 6. а) Да; б) нет. 7. а), б) Да; в) нет. 8. Ромб. 9. Правильный шестиугольник. 13. Равнобедренная трапеция, $P = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5}$. 15. Правильный шестиугольник, $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}a$. 17. Треугольник, четырехугольник, пятиугольник. 18. Равнобедренный треугольник. 20. Да. 22. Нет. 23. Нет. 25. Равнобедренная трапеция. 26. Да.

7

1. Четырехугольные пирамиды, треугольные бипирамиды. 2. а) В = 6, Г = 8; б) В = 7, Г = 10. 3. В = 8, Г = 6. 4. а) В = 8, Г = 6; б) В = 10, Г = 7. 6. Нет. 7. В = 6, Г = 8.

8

1. а) В = 4, Р = 6, Г = 4; б) В = 6, Р = 12, Г = 8; в) В = 8, Р = 12, Г = 6; г) В = 12, Р = 30, Г = 20; д) В = 20, Р = 30, Г = 12. 2. 108°. 3. Нет. 4. Да. 5. Нет; 30 квадратов; В = 32, Р = 60. 6. Октаэдр. 7. $\sqrt{2}$. 9. Тетраэдр — 4, куб — 3, октаэдр — 2, икосаэдр — 4, додекаэдр — 4. 10. Октаэдр.

9

2. $\sqrt{2}$ дм. 3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 4. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. 5. $\frac{\sqrt{2}}{6}$. 6. $\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{10}}$. 7. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 8. $\frac{(3+\sqrt{5})\sqrt{2}}{4}$. 9. $\frac{3+\sqrt{5}}{6}$. 10. $\frac{\sqrt{5}+1}{6}$.

10

1. 4 треугольника и 4 шестиугольника, 8 треугольников и 6 восьмиугольников. 2. Усеченный икосаэдр. 4. $\frac{1}{3}$. 5. $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. 6. $\frac{1}{3}$. 7. $\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{2}$. 8. $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$. 9. а) В = 24, Р = 36, Г = 14; б) В = 60, Р = 90, Г = 32. 10. Операция

сечения; а) усеченный куб; б) кубооктаэдр; в) октаэдр; г) усеченный ктаэдр. 11. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 12. $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

11

1. Нет. 2. Вершины звездчатого октаэдра являются вершинами куба. Октаэдр. 4. 2. 5. 12 вершин выпуклых пятигранных углов; 30 ребер; 2 звездчатых пятиугольных граней. 6. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 7. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 8. Икосаэдра додекаэдра. 9. Пять. 10. Пять.

12

2. в), д), ж). 3. а), б), в), г). 4. а), б), д). 5. Да. 6. Нет. 8. в).

13

1. а) Центр симметрии, оси симметрии, плоскости симметрии, ось симметрии 6-го порядка; б) центр симметрии, оси симметрии, плоскости симметрии, оси симметрии 3-го порядка; в) центр симметрии, оси симметрии, плоскости симметрии, оси симметрии 3-го порядка; г) центр симметрии, и симметрии, плоскости симметрии, оси симметрии 3-го порядка. 3. Ромбодекаэдр. 4. $\cos\varphi = \frac{1}{3}$. 5. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 6. 120°. 7. $8\sqrt{2}$. 8. Три краски. 10. Например, из усеченного октаэдра. 11. Кубооктаэдр.

14

1. Системой этих неравенств. 2. а), б) Первому; в) второму. 3. Прямоугольный параллелепипед. 5. $|x + y| + z \leqslant 1$, $|x - y| - z \leqslant 1$. 6. Октаэдр. 1. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 12. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

15

2. Плоскость. 3. Параллелен. 4. Проходит через начало координат. 5. а) Поднимется на единицу; б) опустится на единицу. 6. –2. $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$. 9. С 1-го склада — 10 т, со 2-го — 20 т, с 3-го — 5 т.). С 1-го склада — 0 т, со 2-го и 3-го — 17,5 т. 11. Хватит. Наименьшее исло станков равно 44, из них 20 должны работать в первом режиме.

16

6. С помощью операции «Stellate». 7. С помощью операции «Truncate». Да. 10. Икосаэдра.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Выпуклые многогранники. — М. — Л. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950.
2. *Александров А. Д.* Что такое многогранник? // Математика в школе. — 1981. — № 1, 2.
3. *Баврин И. И., Садчиков В. А.* Новые задачи по стереометрии. — М. : Владос, 2000.
4. *Березин В. Н.* Правильные многогранники // Квант. — 1973. — № 5.
5. *Болтянский В. Г.* Транзитивные множества и правильные многогранники // Квант. — 1980. — № 7.
6. *Болтянский В. Г.* Элементарная геометрия. — М. : Просвещение, 1985.
7. *Болтянский В. Г., Ефремович В. А.* Наглядная топология. — М. : Наука, 1982.
8. *Болтянский В. Г., Яглом И. М.* Выпуклые фигуры. — М. — Л. : Гостехиздат, 1951.
9. *Вейль Г.* Симметрия. — М. : Наука, 1968.
10. *Веннинджер М.* Модели многогранников. — М. : Мир, 1974.
11. *Волков В. А.* Элементы линейного программирования. — М. : Просвещение, 1985.
12. *Галиулин Р. В.* Как устроены кристаллы // Квант. — 1983. — № 11.
13. Гамаюнов В. Модели звездчатых многогранников // Квант. — 1981. — № 2.
14. *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. — М. : Мир, 1971.
15. *Гиндикин С. Г.* Леонард Эйлер // Квант. — 1983. — № 10, 11.
16. *Глейзер Г. И.* История математики в школе: IX — X кл. : Пособие для учителей. — М. : Просвещение, 1983.
17. *Делоне Б., Житомирский О.* Задачник по геометрии. — М. — Л. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950.
18. *Долбилин Н. П.* Жемчужины теории многогранников. — М. : МЦНМО, 2000. — (Б-ка «Математическое просвещение»; Вып. 5).

19. *Каченовский М. И.* Математический практикум по моделирова-
ию. — М. : Государственное учебно-педагогическое издательство Мини-
ерства просвещения РСФСР, 1959.
20. *Кокстер Г. С. М.* Введение в геометрию. — М. : Наука, 1966.
21. *Люстерник Л. А.* Выпуклые фигуры и многогранники. — М. — Л. :
остехиздат, 1956.
22. *Матиясевич Ю.* Модели многогранников // Квант. — 1978. — № 1.
23. *Пидоу Д.* Геометрия и искусство. — М. : Мир, 1979.
24. *Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф.* Задачи по стереометрии. — М. :
аука, 1989.
25. *Радемахер Г., Теплиц О.* Числа и фигуры. — М. : Наука, 1966.
26. *Савченко В.* Полуправильные многогранники // Квант. — 1976. —
1.
27. *Смирнова И. М.* В мире многогранников. — М. : Просвещение, 1995.
28. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Геометрия. Учебник для 10—
. классов общеобразовательных учреждений. — М. : Мнемозина, 2003.
29. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Компьютер помогает геометрии. —
. : Дрофа, 2003.
30. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Устные упражнения по геометрии. —
. : Просвещение, 2003.
31. *Смирнова И. М., Смирнов В. А.* Нестандартные и исследовательские
дачи по геометрии. — М. : Мнемозина, 2004.
32. *Тихомиров В. М.* 50 лет линейному программированию // Квант. —
89. — № 6.
33. *Шаскольская М. П.* Кристаллы. — 2-е изд., испр. — М. : Наука,
85.
34. *Штейнгауз Г.* Математический калейдоскоп. — М. : Наука, 1981.
35. Энциклопедический словарь юного математика. — 2-е изд., испр.
доп. — М. : Педагогика, 1989.
36. Энциклопедия элементарной математики. — Кн. V. Геометрия. —
. : Наука, 1966.
37. *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и
оремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия). — 2-е изд. —
. : Физматлит, 2000.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Смирнова Ирина Михайловна
Смирнов Владимир Алексеевич

МНОГОГРАННИКИ
Элективный курс
10—11 классы

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
для общеобразовательных учреждений

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*
Редактор *С. В. Бахтина*
Оформление и художественное редактирование: *И. В. Цыцарева*
Технический редактор *И. Л. Ткаченко*
Корректоры *Н. А. Александрова, А. П. Пенская*
Компьютерная верстка и графика: *А. А. Горкин*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.02.953.Д.000389.01.06 от 25.01.06.

Формат $70 \times 90^{1}/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,02. Тираж 3000 экз. Заказ № 514

ИОЦ «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: (495) 367-54-18, 367-56-27, 367-67-81; факс: (495) 165-92-18.
E-mail: ioc@mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина». Тел./факс: (495) 783-82-84, 783-82-85, 783-82-86.
E-mail: tid@mnemozina.ru

Отпечатано в ООО «Финтрекс». 115477, г. Москва, ул. Кантемировская, 60.